

瞄準！發射砲彈



- 01 重鎚投石器 / 重力位能
- 02 大砲 / 化學能
- 03 磁軌砲 / 電磁能

Photo | depositphotos
<https://www.rallypoint.com>

火砲的進化就是科技的演進

教科書中關於科學的演進，大多是介紹人類因對大自然的變化充滿崇敬與好奇，想要尋找其自然的規律與法則，從而開始觀測與歸納天體與運動等現象。但若以另一角度來觀察，可以發現人類因想用科技的威力來解決彼此間的衝突，故而促進了科技進展，也推進著武器的大幅進步。

早期步兵僅能使用人的手臂力量投擲矛等武器，接著發現可以運用弓的彈力位能射出箭。為了破壞高大的防禦城池，發展出巨大的重鎚投石器，以重力位能帶動槓桿發射石塊來擊潰城牆。火藥的發明，使戰爭模式出現大幅的轉變，以化學能擊發火槍的子彈還有火砲的砲彈，巨大的威力摧毀了歐洲封建制度，也促使歷史進入大航海時代，開啓船堅砲利的列強對世界各地進行殖民掠奪的時代。17世紀的物理學家惠更斯（Christiaan Huygens, 1629 ~ 1695），曾經構想將少量火藥放入汽缸中，推動活塞而不是砲彈，活塞帶動曲軸旋轉，這成為最原

始的內燃機概念。

進入二次世界大戰後期的納粹德國，為了增加武器的射程，將火砲改良為火箭，又為了提高準確度，將火箭加入陀螺儀等導引系統，變成史上第一個導引飛彈。除了化學能以外，海上航空母艦上使用高壓蒸汽推送的不是砲彈，而是載滿炸彈的艦載飛機，使飛機能夠在短距離的飛行甲板上，加速到足以飛行的速度直至離地升空。而科學家釋放原子核的力量所開發出的原子彈，其巨大的威力終結了二次世界大戰。

現今的航空母艦有的已改用電磁彈射推動艦載飛機起飛，而以電磁力取代火藥驅動的砲彈也已在實驗測試的階段，電磁軌道砲若是研發成功，便能解決舊有火砲載彈量有限、儲存危險，且擊中目標前需要飛行一小段時間，讓敵人有時間防禦或躲避的缺點。

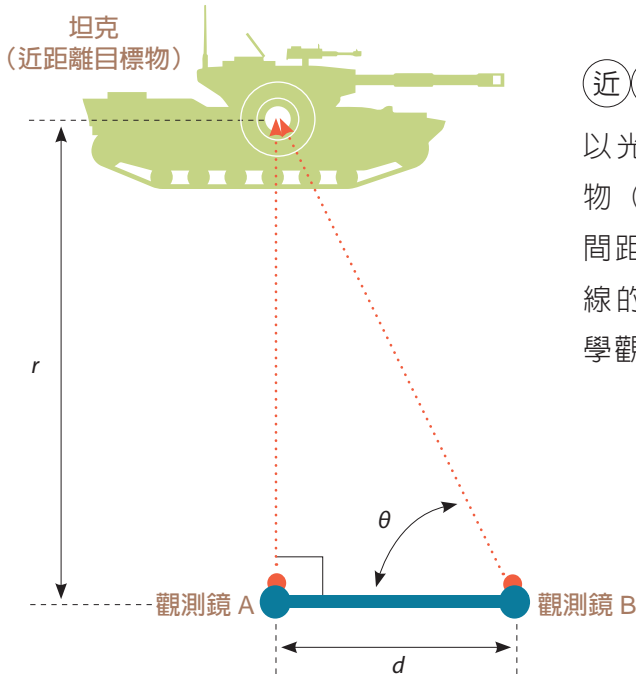
由此看來，武器的發展史同時也是人類使用各種不同能量作為攻擊、投射的科技發展史。

目標瞄準與數學

透過雙眼觀看物體時，因為兩眼瞄向物體各有其微小視角差異，所以在兩眼視網膜中，會得到兩個有些許差異的影像，這兩影像會在大腦中融合，讓我們對此物體產生立體感，加上經驗對物體大小已有認知，所以可由視覺判斷物體的遠近。

大砲射擊時需要測量目標物與大砲間的距離與方位，砲手必須依據觀測數據來調整大砲發射角度，才能夠擊中目標，最簡單的測量方法，就是**光學三角測量法**，這與第一段提到的兩眼視角差判斷遠近很類似。

光學三角測量法

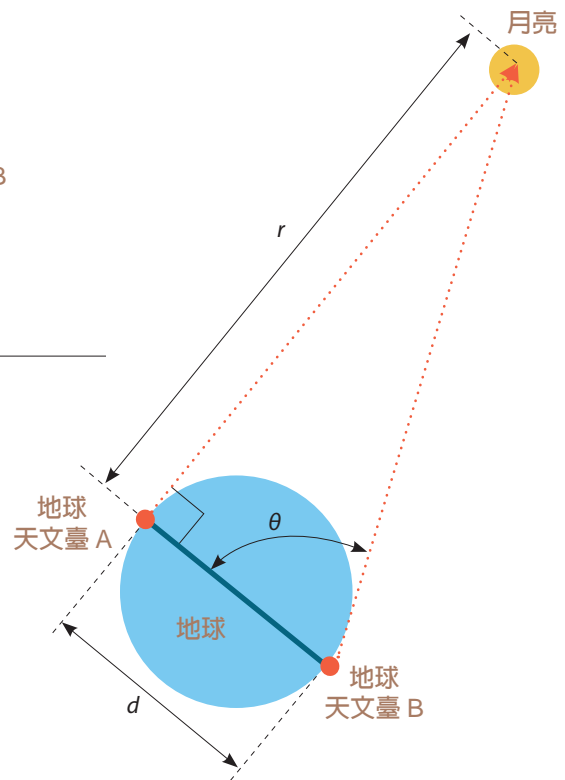


近距離量測

以光學測距儀來量測近距離的目標物（坦克）時，已知兩觀測鏡 A、B 間距為 d ，當目標物與鏡 A、鏡 B 連線的夾角為 θ ，可得知目標物與光學觀測儀的距離 $r = d \tan \theta$ 。

遠距離量測

當目標越遠時， θ 就會越趨近 90 度，計算得到的距離 r 誤差也會越大，所以要盡可能增加兩觀測鏡間距 d 的距離。在觀測遠方恆星時，如果想知道該恆星距離地球有多遠，就要選擇在地球上最大間距，也就是地球直徑兩端地表上的天文臺 A、B 同時觀測，即可算得地球距離恆星的距離。



如何才能瞄準目標，百發百中？

Keywords

- ▶ 光學測距儀 Optical rangefinder
- ▶ 三角測量法 Triangulation
- ▶ 視角 Angle of field
- ▶ 光角 Optical angle
- ▶ 前置量 Aim-off

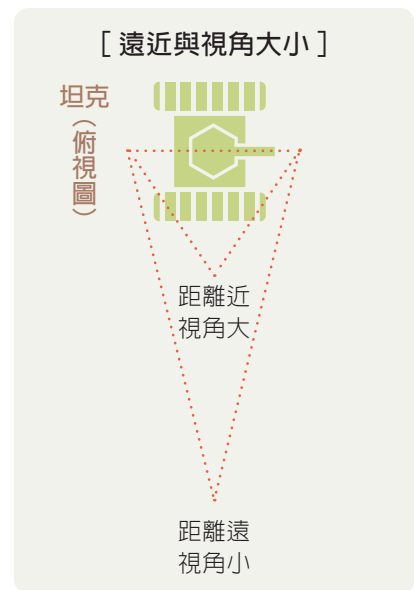


| no.1 |

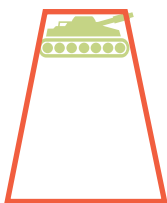
仰角增加射程改變

古代戰爭片裡常見弓箭手仰著角度拉弓射箭擊中極遠的目標。在物理運動學裡提過，以仰角 45 度發射可以飛行最遠。但是到底要用多少角度發射才能擊中呢？除了發射初速外，必須先判斷目標的遠近，才能決定發射仰角，而最簡單的方法就是觀察物體的大小，也就是運用**視角**。

當物體越靠近自己時，看起來會比較大，視角也會較大，而遠距離的物體看起來較小，視角也較小。利用這個原理可以設計反坦克火箭發射器的瞄準器照門，因為坦克車的車長相似，想要射擊較遠的坦克車，發射的仰角必須較大，所以瞄準照門上端須設計得較窄，觀測到遠距離坦克車身長對齊照門上端寬度，就是最佳發射仰角。

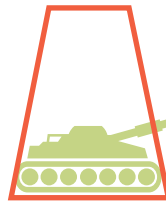


遠目標對準照門上端

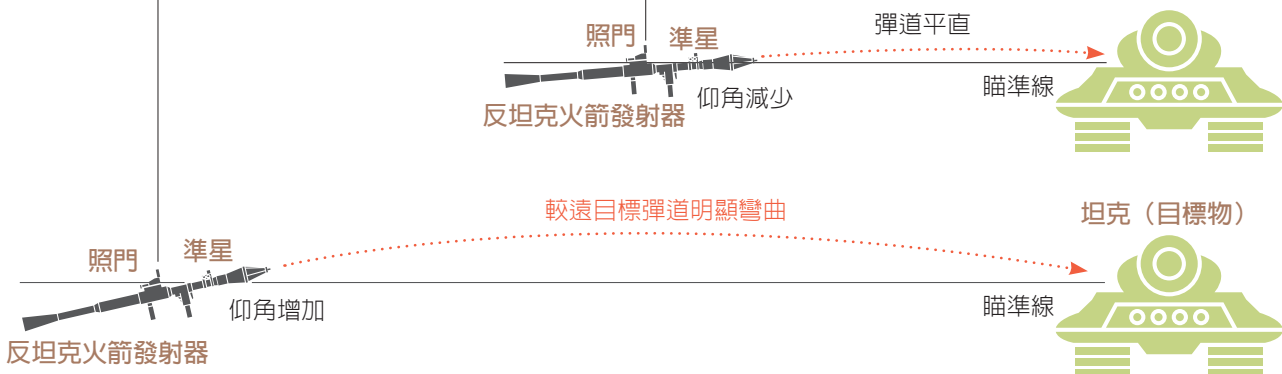


遠目標發射仰角需增加，
將較小目標對準照門上端

近目標對準照門下端



近目標發射仰角需減少，
將較大目標對準照門下端



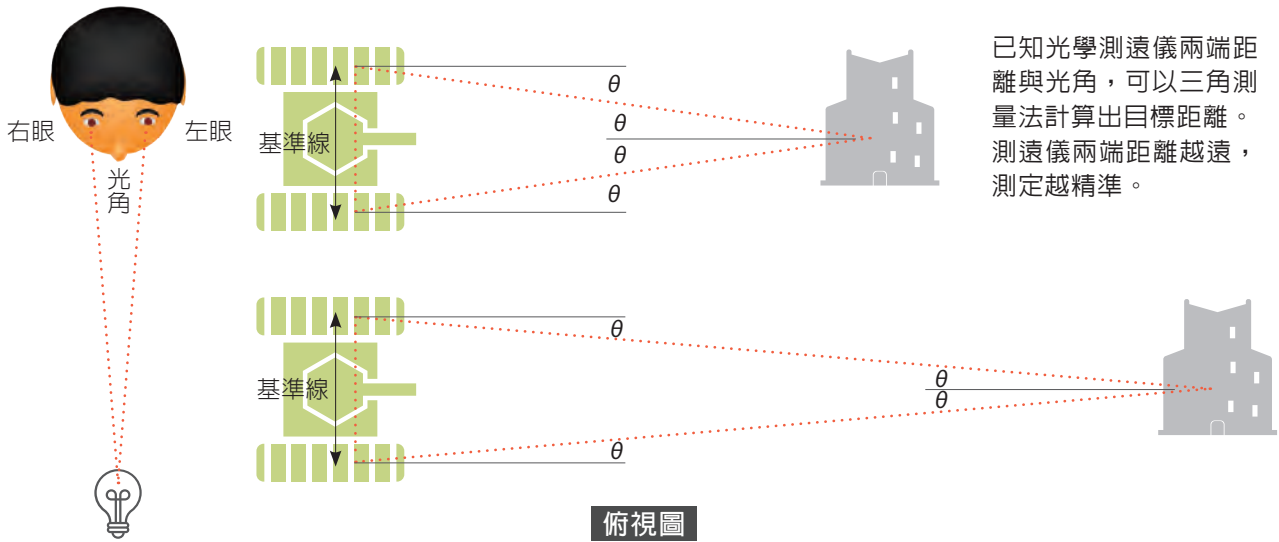
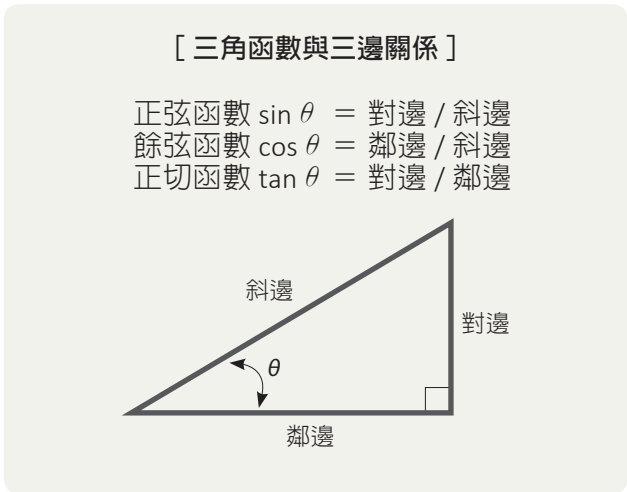


| no.2 |

光學測距儀（光角）

除了用物體大小可以辨別遠近之外，人可以藉由雙眼視線偏向的角度多寡（光角）來判斷物體遠近，這就是光學測距儀的原理。

以光學測距儀兩端已知距離為基準線，與目標相連所夾光角，利用三角測量法測定可以計算出目標距離。當然光學測遠儀基準線越遠，對於遠距離的目標，更能精準調整角度而測定出目標距離。

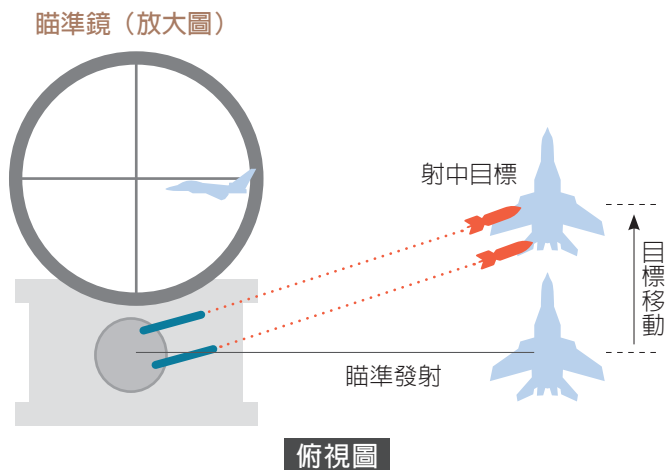


| no.3 |

瞄準射擊高速目標要有前置量

從瞄準發射到擊中目標，子彈還需要一段飛行時間，這時間內目標可能已經移動不在原來位置。所以要瞄準快速移動的物體，必須瞄準物體運動方向的前方，這稱為前置量，精確預估出前置量才有可能剛好擊中目標。

想用機砲攻擊移動的飛機，前置量的計算方法如下：先測量飛機目標距離，再由砲彈速度計算砲彈擊中需多少飛行時間，再將飛機速度乘上砲彈飛行時間就可以預估發射的方向。



發射子彈到擊中目標需要一段時間，瞄準快速移動的物體時，須瞄準物體前方，才能剛好擊中目標。

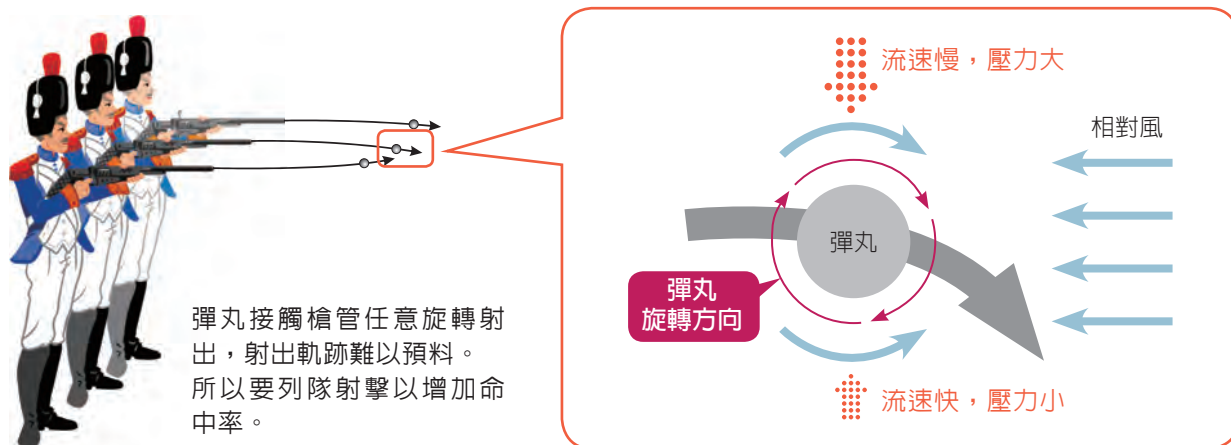
沿著膛線射出的子彈，為什麼會旋轉？

Keywords

- ▶ 膛線 Rifling
- ▶ 流線型 Streamline
- ▶ 瑪格納斯力 Magnus force
- ▶ 迫擊砲 Mortar

no.1 | 火槍士兵為什麼要列隊射擊？

演繹法國拿破崙時期的戰爭電影中，常見士兵排排站著開槍的場景，難道他們不怕被子彈擊中嗎？除了因為要站著方便裝填子彈外，其實當時的火槍是使用球形彈丸，射出時槍管接觸摩擦彈丸一側會任意旋轉射出，就像變化球一樣讓射出軌跡難以預料，所以只好讓士兵列隊密集射擊，以增加彈丸的命中率。

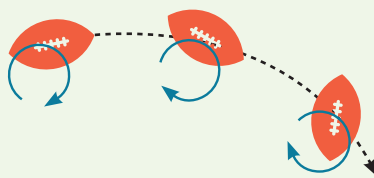


no.2 | 橄欖球擲出時為什麼要旋轉？

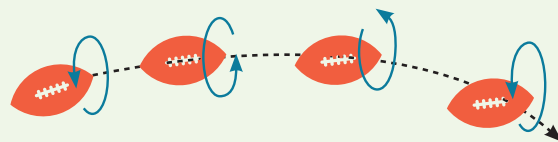
橄欖球的形狀是橢圓球體，比起一般球的形狀更流線形一些，理論上應能投擲的更遠。但是如果投擲時橄欖球體是前後翻滾，阻力大增，根本擲不遠。而若是運用技巧讓橄欖球順著軸線方向旋轉擲出，讓空氣阻力大為減少，就能投擲的更遠些。

其實子彈的設計也和橄欖球一樣，流線型的子彈比球形的彈丸阻力更小，但是流線型的子彈如果不能以軸線旋轉射出，而是隨意翻滾的話，那還不如球形彈丸可以射得遠！然而流線型的子彈就必須搭配槍管內的膛線，使子彈沿膛線旋轉射出，就像橄欖球一樣能穩定飛行，最後精準命中目標。

將橄欖球以自由旋轉方式擲出，阻力大，射程低。

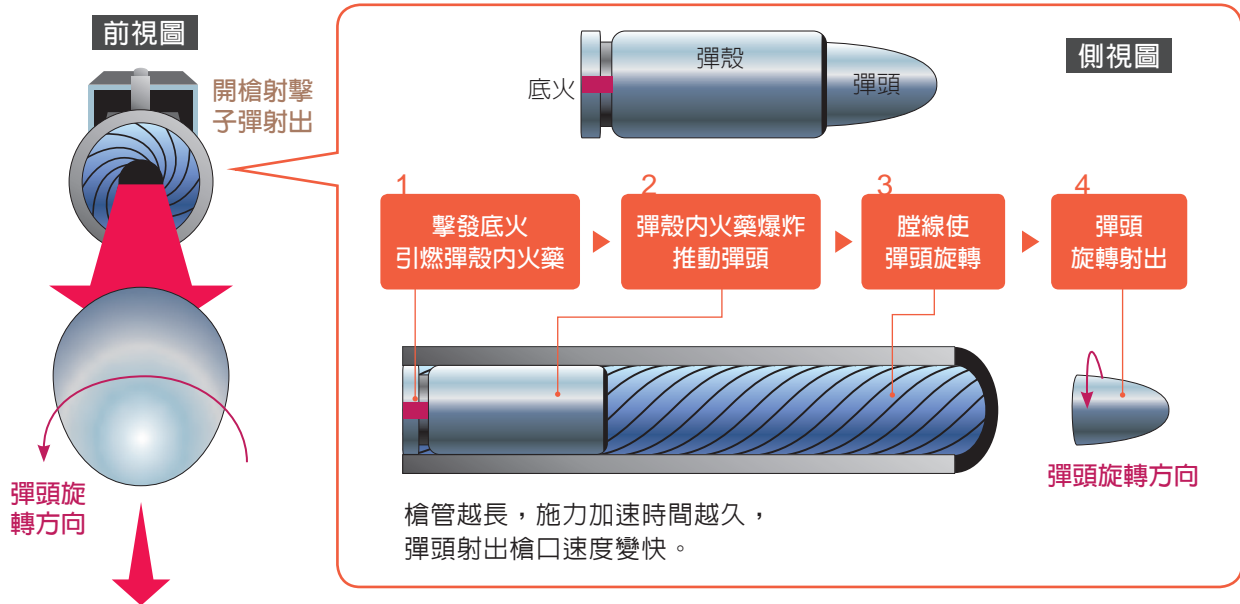


將橄欖球沿著軸線方向旋轉擲出，阻力較小，射程遠。



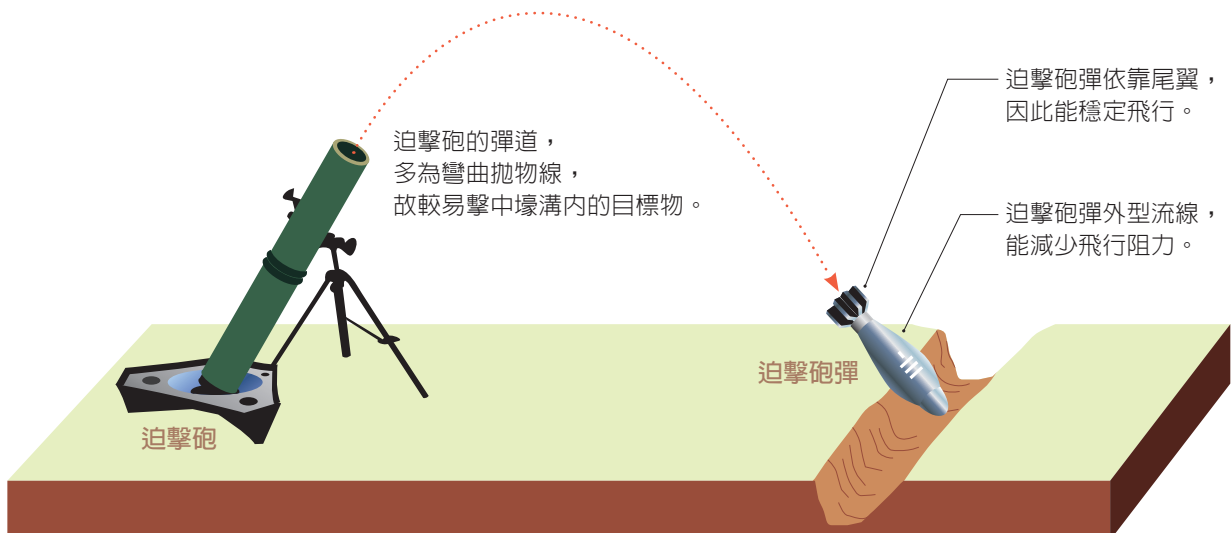
| no.3 | 子彈加速發射

開槍射擊啟動扳機時，撞針會敲擊子彈的底火，底火引燃彈殼內的火藥，火藥爆發使彈頭在槍管內膛線旋轉加速，最後從槍口射出。而槍管的長度決定彈頭在槍管內加速的時間，槍管越長，彈頭加速的時間越久，使彈頭射出的速度越大，能擊中更遠的目標。



| no.4 | 迫擊砲管內沒有膛線，砲彈如何穩定飛行呢？

迫擊砲為步兵隨身攜帶的簡便武器，一般的迫擊砲砲管內沒有膛線，又稱為光膛砲。但是如果沒有膛線，砲彈要如何穩定飛行呢？答案就是將砲彈加上尾翼，就像箭的尾羽能穩定飛行一樣，迫擊砲的砲管通常不會很長，所以砲彈射出的速度不大，而砲彈飛行的軌跡多為彎曲拋物線，所以能擊中壕溝內的目標。



運動員是如何擲球的？

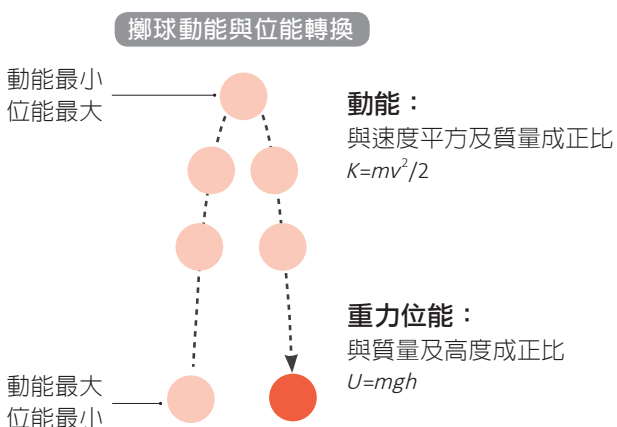
Keywords

- ▶ 動能 Kinetic energy
- ▶ 重力位能 Gravitational potential energy
- ▶ 力學能守恆 Law of conservation of mechanical energy
- ▶ 牛頓第二運動定律 Newton's second law of motion

在物理課的力學單元中學過，不計空氣阻力以相同的初速投擲球，若要能將球投到最高，則必須鉛直上拋，使到達最高點時球速為零，此時球的動能轉變成**重力位能**。而若要將球投擲最遠，則要以仰角 45° 斜向拋射。但是事實上，人非機器，要以手臂控制球投擲所需的加速力道並不容易，更何況同時還要調整投擲時離手的姿勢，以修正發射仰角！因此，球員們能投出好球是很不容易的！

no.1 | 質量大還是質量小的球可以丟比較遠？

試想若我們以相同的施力，分別投擲出大小和形狀相同的紙球、鉛球與壘球。可預想到紙球質量最輕，最容易被加速，所以離手瞬間球速最快，但也因為質量小，極容易立刻被空氣阻力所減速，根本拋不出去。而鉛球則因質量太大，難以加速，所以投擲出去後速度並不快，但因鉛球的**慣性**大，投出去後較不容易減速。最後壘球因為質量適當，所以可以投擲的最遠。



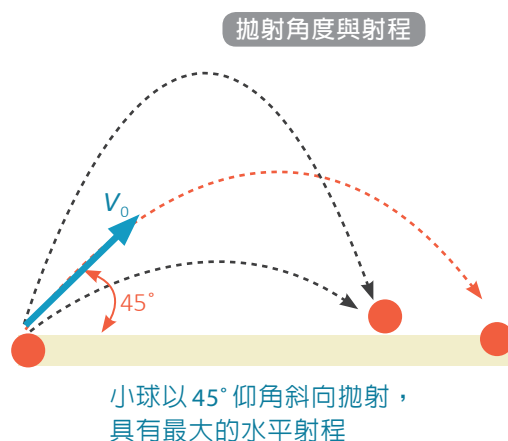
[力學能守恆]

1 號位置位能 + 動能 = 2 號位置位能 + 動能
損失位能 = 增加動能 (不計空氣阻力)

$$mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$-mg(h_2 - h_1) = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

$$-\Delta U = \Delta K$$



[水平射程]

水平射程 = 水平速度 × 飛行時間
飛行時間 = 2 倍垂直速度 / 重力加速度

$$R = (v_o \cos \theta) \times \left(\frac{2v_o \sin \theta}{g} \right)$$

$$R = \frac{v_o^2 \sin 2\theta}{g}, R_{\max} = \frac{v_o^2 \sin 90^\circ}{g} = \frac{v_o^2}{g}, \theta = 45^\circ$$

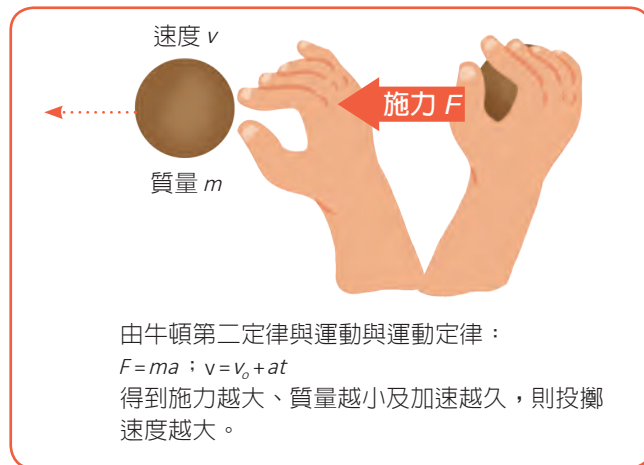


| no.2 |

如何增加擲出球的初速？

要增加拋擲離手的速度有兩種方式，第一個是增加手臂力量，用以提升加速度，使末速變快。另一種方法是延長球的受力時間，使末速能夠提高。所以投球前須先助跑加速，然後扭腰揮臂，再擲出球。運動員流暢的運用腿部、腰部與手臂等處肌肉來加速擲球，可以延長球的受力加速時間，讓球出手後速度變的更快。

而田徑比賽中的鏈球選手，因為鏈球質量大，不易加速，因此會利用雙手抓著鏈球的鏈子旋轉，在旋轉過程中鏈球不斷加速，當到達最快的瞬間，才以最佳的仰角擲出鏈球，以獲得最遠的投擲距離。



仰角 90° 投出，
加速時間少，初速慢

仰角 0° 水平投出，
加速時間長，初速快

扭腰揮臂
增加投擲速度

跑 2 ~ 3 步，開始加速



如何增加砲彈的威力？

Keywords

- ▶ 自由落體 free fall
- ▶ 動量 momentum
- ▶ 水平拋射 Horizontal projectile motion
- ▶ 聲音速度 sound speed
- ▶ 垂直水平運動獨立性 Independence of vertical and horizontal motions



| no.1 |

如何增加砲彈的威力？

如果僅用炸彈爆炸的力量，可能難以貫穿坦克的堅固裝甲車體，但是若改由飛機從高空水平擲落炸彈，以高速擊中目標，就可以增加炸彈的破壞威力。

我們將炸彈分為水平與垂直兩方向研究，投彈後炸彈由於慣性作用，水平方面為等速運動。在垂直方面則是初速為零，受重力加速度，將垂直速度增加，為等加速度運動。因為炸彈在水平方向擁有和飛機相同的速度，所以透過轟炸機的飛行員觀看投彈過程，炸彈就像**自由落體**。而以地面的觀察者觀看炸彈落下飛行軌跡，就像**水平拋射**路徑。

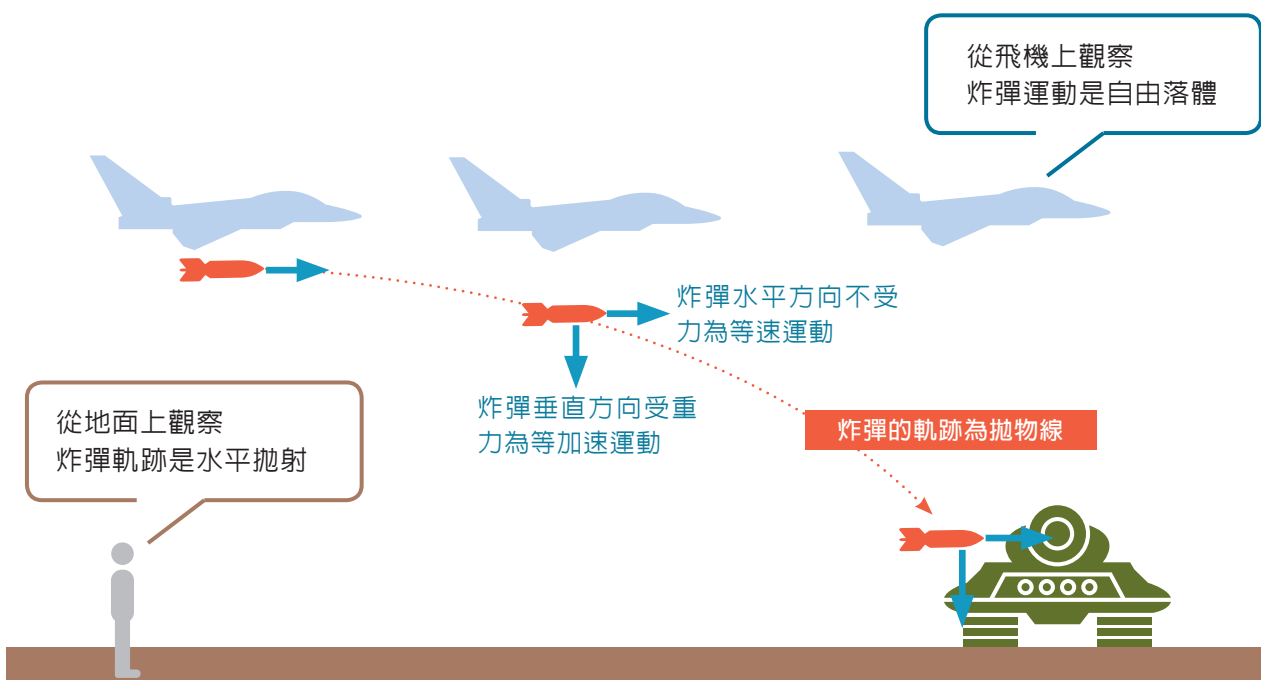
[垂直水平運動獨立性]

水平拋射運動，不考慮空氣阻力下：
 水平分量維持原速度，
 為等速運動： $v_x = v_{x0}$
 垂直分量受重力加速，
 為自由落體： $v_y = -gt$

[力等於動量時變率]

動量等於質量乘上速度： $\vec{p} = m\vec{v}$
 合力等於動量時變率：

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$





| no.2 |

如何讓兩發砲彈同時擊中目標？

如果你是砲兵指揮官，決定先發制人，首次發砲攻擊，就要完全殲滅敵人，除了需要很多門大砲同時發射外，還有什麼辦法？方法就是用一門大砲抵兩門砲，先發射一枚仰角較大的砲彈，因砲彈飛行的軌跡較彎曲，因此飛行時間較久。繼而，趁第一枚砲彈還在飛行中，降低砲管的仰角，緊接著發射出第二枚砲彈，此砲彈的飛行軌跡平直，故而飛行時間較短，因此極可能兩發砲彈同時擊中目標。注意此兩次開砲初速相同，但仰角為互餘（相加為 90 度），就有相同的射程，能擊中相同目標。

① 第一發砲彈

高仰角射出，
砲彈飛行軌跡彎曲，
飛行時間較久，
飛行高度較高。

② 第二發砲彈

低仰角射出，
砲彈飛行軌跡平直，
飛行時間較短，
飛行高度較低。

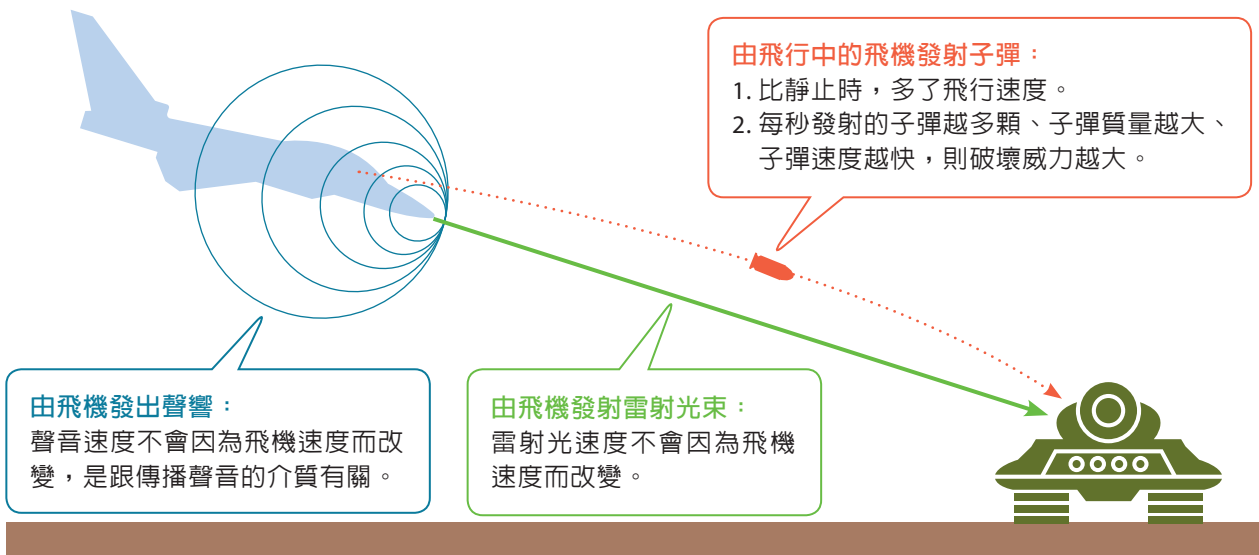


| no.3 |

由高速俯衝的飛機發射子彈能否增加威力？

在飛機高速俯衝的同時發射子彈，子彈的飛行速度等於飛機速度，加上火藥發射推進速度，力量的計算可以用動量的時變率說明，而動量為質量乘上速度，所以子彈的速度快且質量夠大，加上每秒發射子彈數目極多，所產生的威力十分可觀。

由飛機發射子彈，飛機的速度可以提升子彈飛行速度，但是若換成由飛機發射雷射光，雷射光的速度並不會因為飛機速度而有所變化；同樣的現象，由飛機發出聲響，聲音速度也不會因飛機速度而改變，而跟傳播聲音的介質比較有關聯性。



由飛行中的飛機發射子彈：

1. 比靜止時，多了飛行速度。
2. 每秒發射的子彈越多顆、子彈質量越大、子彈速度越快，則破壞威力越大。

由飛機發出聲響：

聲音速度不會因為飛機速度而改變，是跟傳播聲音的介質有關。

由飛機發射雷射光束：

雷射光速度不會因為飛機速度而改變。

如何測量子彈的速度？

Keywords

- ▶ 作用力與反作用力 action and reaction
- ▶ 馬赫角 Mach angle
- ▶ 衝擊擺 Ballistic pendulum
- ▶ 動量守衡 Conservation of momentum
- ▶ 非彈性碰撞 Inelastic collision

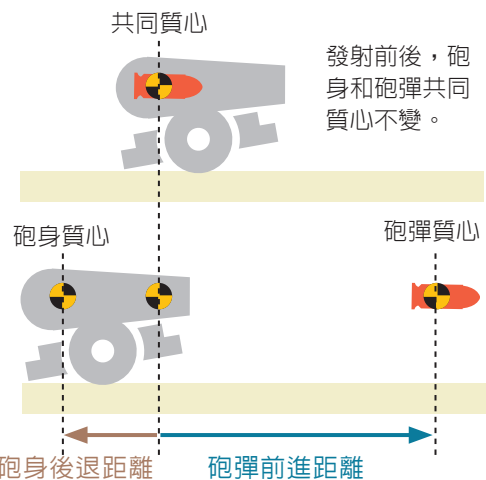


| no.1 |

開槍射擊為什麼有後座力？

開槍引燃彈殼內火藥爆炸，使得槍枝推動子彈向前的作用力（加速向前），與子彈推動槍枝向後的反作用力（後座力），此兩力大小相同，但方向相反，互為作用力與反作用力。子彈的質量比較小，在密閉槍管內十分容易加速，離開槍管後，就以慣性高速前進飛行，受到空氣阻力減速與重力使彈道彎曲。雖然受到相同大小的力量，然而槍枝的質量遠大於子彈，後座力使槍枝後退的速度就小得多。

如果將槍托緊靠肩膀，並將身體牢固依附地面，後座力就更難以撼動如此巨大質量（槍加上人加上地面），因此槍枝後退的速度就會更小。



發射前後，砲身和砲彈共同質心不變。

砲對彈作用力與彈對砲反作用力，大小相等，方向相反。質量小的彈加速較大。



| no.2 |

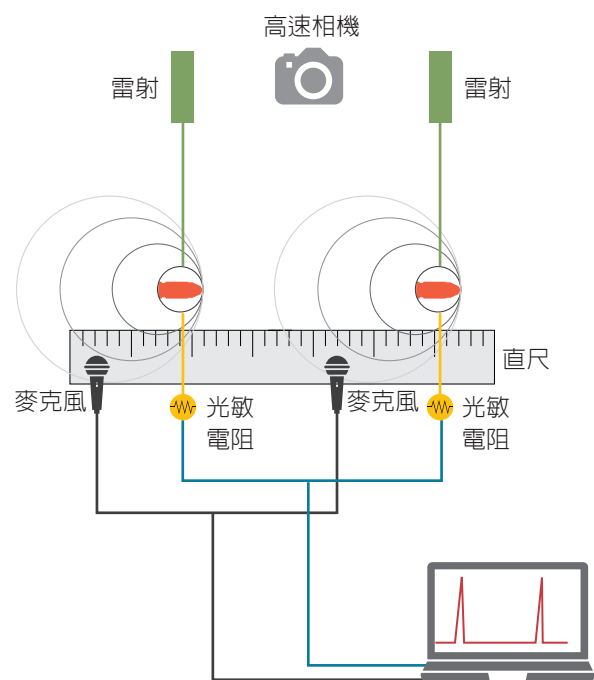
如何測量子彈的速度？

子彈速度太快，不容易用肉眼觀測記錄，那麼如何能測量子彈的速度呢？

〔光遮斷與聲音測速〕

最簡單測量子彈速度的方法就是用高速攝影，錄像記錄子彈運動的距離與時距，就能順利求出速度。而利用子彈前進時遮斷雷射的時距，也可以測出子彈速度。

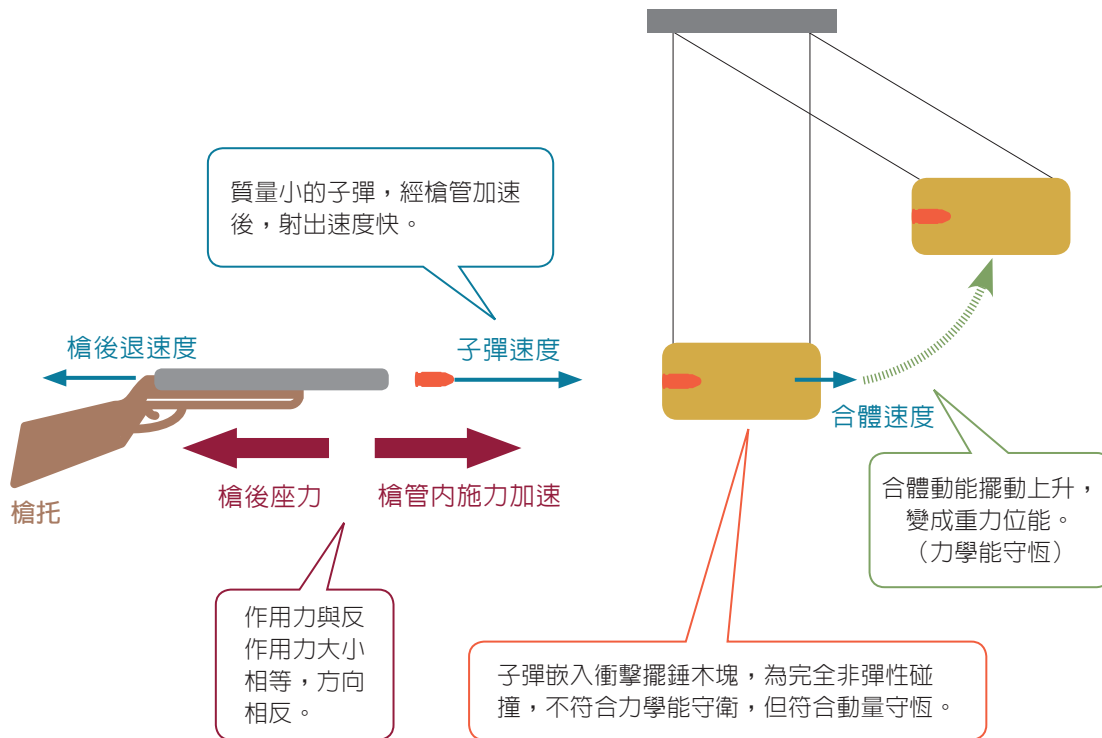
子彈以超過聲音的速度前進時，就像超音速飛機一樣會產生圓錐狀馬赫角，利用兩隻麥克風記錄此音爆衝擊的先後時距，就能計算子彈的平均飛行速度。



〔以衝擊擺測量子彈速度〕

將子彈擊發後嵌入質量大的擺錘，兩者合體速度就會急遽減慢，當合體擺盪到最高點時，就很容易觀測記錄其最大高度。當擺錘擺到最高處，可由高度與合體質量得知重力位能，由力學能守衡觀念可推算出最低處的合體速度。

碰撞可分為三類，其中子彈嵌入衝擊擺錘木塊為完全非彈性碰撞，完全非彈性碰撞不合力學能守衡，但是符合動量守衡。已知子彈質量，碰撞後總動量（合體質量乘上合體速度）會等於碰撞前總動量，即可算出合體前的子彈速度。



[彈性、非彈性與完全非彈性碰撞]

- 1 彈性碰撞：碰撞壓縮時，儲存彈力位能完全釋放，能彈回原高度。
- 2 非彈性碰撞：碰撞壓縮時，儲存彈力位能不能完全釋放，不能彈回相同高度。
- 3 完全非彈性碰撞：碰撞後黏成合體。

彈力球 木球 黏土球

[單擺：力學能守恆]

擺錘由最低點，速度最快處，擺到最高點速度為零折返點，擺錘的動能轉為重力位能。

折返點 高度最高 速度為零

最低點 速度最快

折返點 高度最高 速度為零

哪些槍砲不需要使用火藥？

Keywords

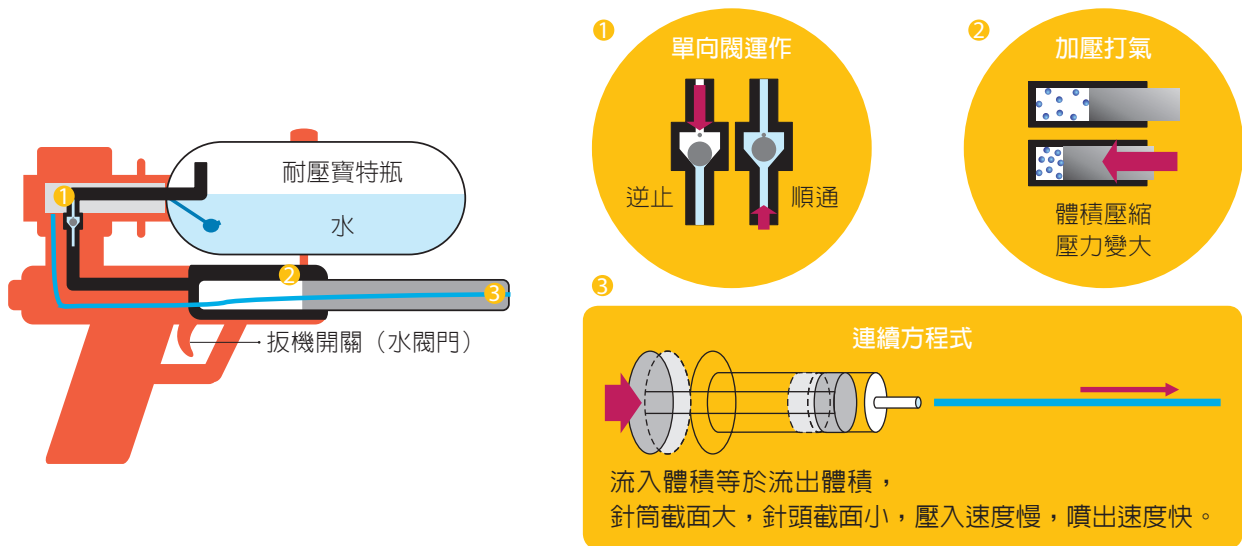
- ▶ 壓縮空氣儲能 Compressed air energy storage
- ▶ 磁軌砲 Railgun
- ▶ 蒸汽砲 Steam cannon
- ▶ 超級電容 Supercapacitor



| no.1 | 水槍的設計原理

早期的水槍以扣扳機壓縮唧筒，射程僅有 2 ~ 3 公尺遠，水量也不多。現在的水槍預先壓縮空氣儲能，扣扳機後，不但可連續發射，其強力水柱射程甚至可達 5 ~ 6 公尺以上。

那兩者之間的差別在哪呢？以前的水槍構造像一個迷你注射筒，扣扳機等於在推活塞一樣，食指力量有限，活塞不能設計成太大，以免推不動。而且因為行程短，所以能擠出的水量就更少，食指按壓扳機速度決定活塞壓縮速度，並依連續性方程式，水由窄小槍口快速噴出。而現在的水槍，先以手臂像打氣筒方式充氣，因而儲存大量的高壓氣體，能連續推動水柱高速噴出，因此不受扳機的機械構造所限制。



[壓縮空氣儲能]

壓縮空氣與抽蓄儲能 (Pumped storage)、儲熱 (Thermal energy storage)、飛輪 (Flywheel) 皆屬於機械儲能。1978 年起，德國發電廠便已在夜晚將多餘的電以壓縮空氣注入地下洞穴，白天再釋放壓縮空氣驅動發電機發電。壓縮空氣提供工廠內氣動工具的能源，也可用於短程運輸 (如商店櫃檯將現鈔置入瓶內，再以壓縮空氣管線運鈔)。

[理想氣體方程式：PV=nRT]

P ：氣壓 V ：氣體體積
 n ：莫耳數 T ：絕對溫度

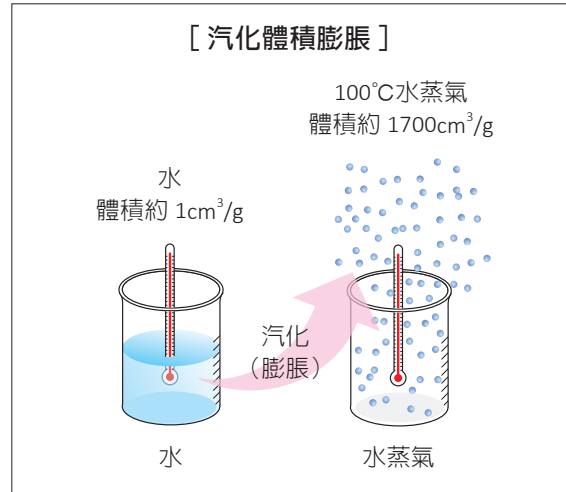
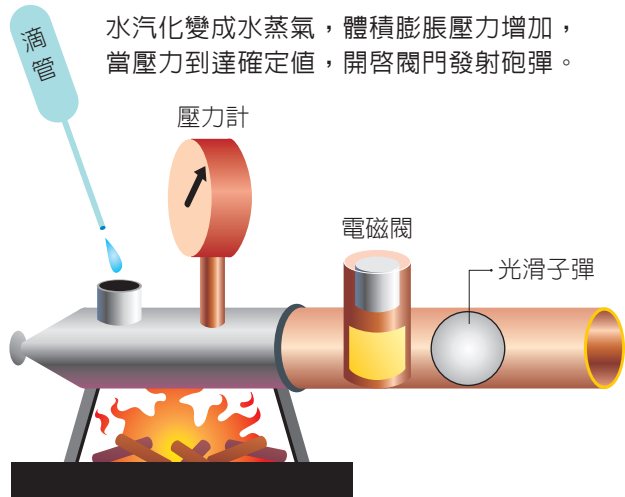
1 莫耳水 18g，1 大氣壓下室溫體積約 18cm³。理想氣體方程式： $P=1\text{atm}$ ， $n=1\text{mol}$ ， $T=373\text{K}$ ， $R=0.082\text{atm} \cdot \text{L/mol} \cdot \text{K}$ ，得蒸汽體積 $V=30.6$ 公升，水汽化成攝氏 100° 蒸汽，約膨脹了 1700 倍。



| no.2 |

在歷史上短暫出現的蒸汽砲

據說美國在南北戰爭時期，南軍在火藥欠缺的階段曾研發出蒸汽砲（槍），利用水汽變成水蒸氣後，體積膨脹上千倍的特性，來推動砲（槍）彈。但蒸汽砲使用前，需要燒大量開水以產生水蒸氣，不僅耗時，且體積龐大，移動困難，使用上不是很方便。

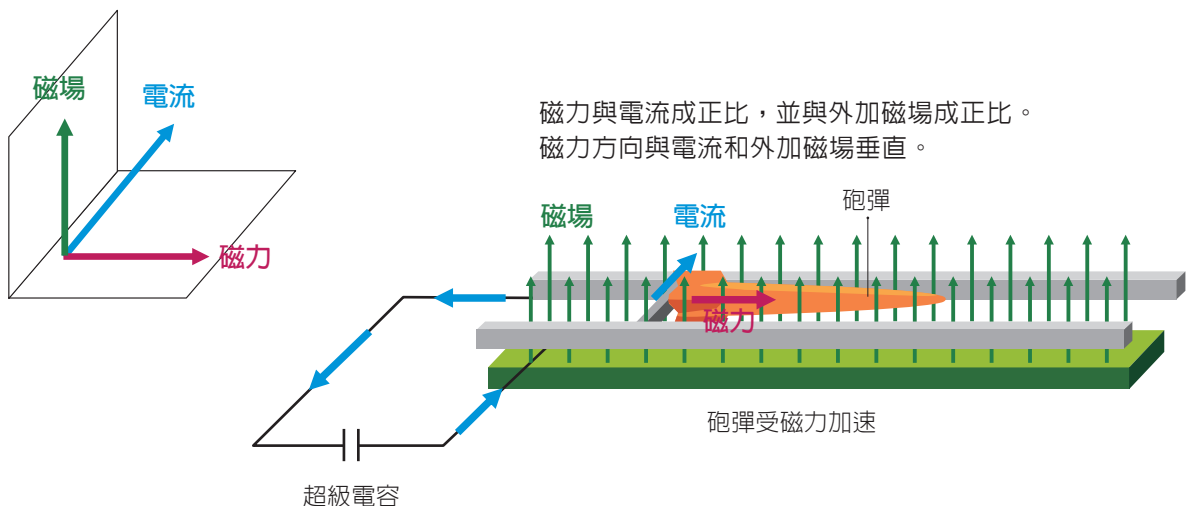


| no.3 |

以電磁能推進砲彈的磁軌砲

火藥一直是傳統槍砲發射彈丸的動力來源，過去槍彈或砲彈大多將火藥裝在彈殼內，以避免受潮失效，而彈殼卻占去砲彈過半的體積，導致裝載的砲彈數變少，如果改用磁力加速砲彈，不但不需要彈殼，還能精確控制發射速度。

以磁力發射砲彈需要極大瞬間電流，可以用超級電容高速放電特性供電，而電流通過跨兩條導電軌道間的滑塊，在垂直的磁場中會受到磁力推動砲彈，最後以高速發射砲彈。據說目前電磁軌道砲的砲彈速度，可以達到火藥推動兩倍以上速度，甚至科學家還有利用磁軌砲將太空船發射進入太空的構想。



三角測距與傾角 App



〔前言 / Introduction〕

在軍事上射擊前要先確認目標距離，而現在蘋果手機使用飛時測距 (Time of flight) 技術，以紅外線雷射 3D 感測器迅速建立人臉模型，可見測距是個重要的問題。此處要談的光學測距，是最簡單的測距方法，使用數學正切函數 $\tan \theta$ 計算距離，當已知直角三角形的對邊，再觀測俯角 (也就是對角)，即可求出鄰邊的長度，此即是與目標的距離。

Keywords

- ▶ 光學測距 Optical ranging
- ▶ 三角函數 Trigonometric functions
- ▶ 手機傾斜應用程式 Smartphone clinometer App



材料與方法

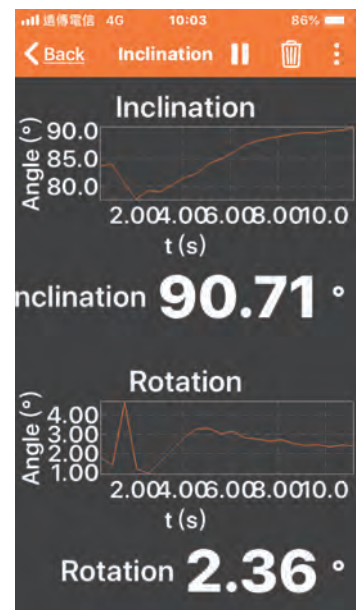
Materials and Methods

數學：三角函數。

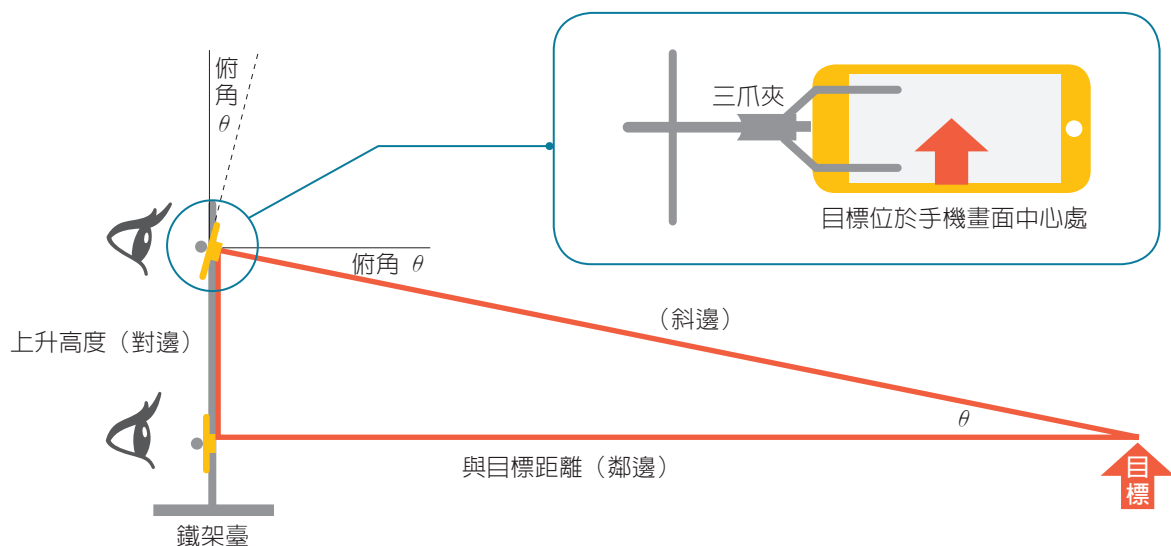
正切函數 $\tan \theta = \text{對邊} / \text{鄰邊} = \text{上升高度} / \text{與目標距離}$
 與目標距離 = 上升高度 / $\tan \theta$ 。

實驗步驟

- ① 三爪夾將手機固定在鐵架臺 (或使用自拍棒)。
- ② 開啓 Phyphox App 的 inclination 與相機 App。
- ③ 放置目標在距離手機 1 ~ 5 公尺處，並記錄彼此距離。
- ④ 手機傾角調至零度且調高度直至手機畫面中心在目標處。
- ⑤ 手機逐步上調固定距離，並調整俯角使目標在畫面中心。
- ⑥ 繪出高度與俯角 (實驗與理論計算) 的關係圖。
- ⑦ 繪出高度與距離 (實驗計算與真實) 的關係圖。



↑ 以 Phyphox inclination App 測量瞄準目標手機傾斜角度



↑ 手機傾斜感應器與三角測距裝置圖

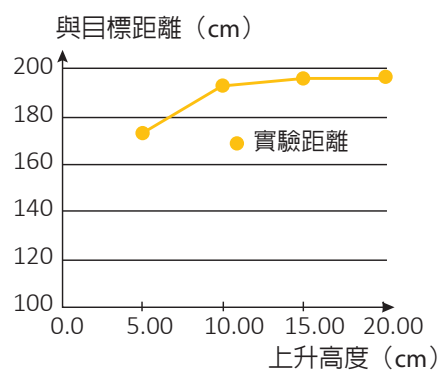
結果 Results

下方表格設定目標與手機的距離為 200 公分（鄰邊），將手機上升高度（對邊）分別設定為 5 公分、10 公分、15 公分等，代入正切函數計算得到理論角度，並依據實驗手機俯角得到實驗距離。

圖表的橫軸為變因（上升高度），縱軸為觀測值，最初觀測的是角度，再將角度與上升距離計算出實驗距離。

手機傾斜三角測距離實驗（真實距離 200 公分）

高度 / cm	理論角度 / 度	實驗角度 / 度	實驗正切值	距離 / cm
0.00	0.00	0.00		
5.00	1.43	1.65	0.0288	174
10.00	2.86	2.96	0.0517	193
15.00	4.29	4.38	0.0766	196
20.00	5.71	5.79	0.101	197
25.00	7.13	7.25	0.127	197



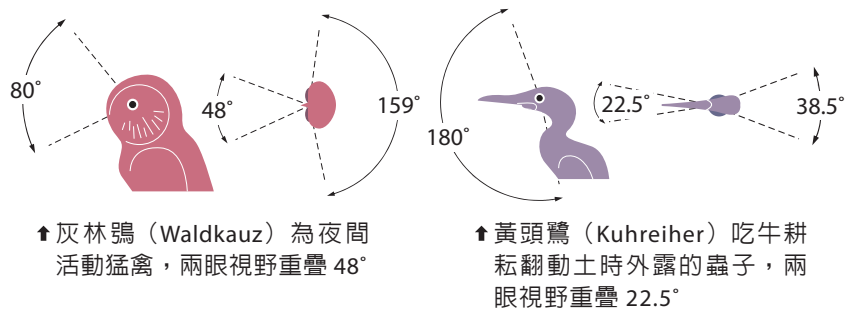
← 手機上升高度由觀測俯角求出實驗距離關係圖（真實距離 200cm）

討論 Discussion

- 使用槍枝時，視線經過照門觀測、準星正對著目標就代表瞄準。但使用手機的相機觀測目標時，視野寬廣，雖然看到目標，但是瞄的準不準卻不知道。所以必須儘可能放大畫面，同時確認目標在畫面的正中心處（開啓相機井字分格線）。
- 手機上升高度較小（直角三角形的對邊小），會得到較小的俯角，由實驗數據顯示，這樣測量距離與實際距離的誤差會比較大。

延伸閱讀

灰林鴉利用視力判斷與獵物的距離時，必須兩眼直視前方，而且兩眼的視野重疊區較大，有利於立體視覺。而黃頭鷺的兩眼位於頭部兩側，視野較廣，但兩眼的視野較少重疊，不利判斷距離。



〔標題〕

提示：前頁範例將目標視為一點，藉由不同高度下觀測目標的俯仰角計算距離。而本實驗修改為已知高度的物體，例如 101 大樓，觀測樓頂的俯角度，計算出與此大樓的距離，請試著寫出標題。

〔前言〕

- 提示：1. 搜尋 Parallax method 與 Jacobian。
 2. 重要性：測距對軍事、地圖土地測量、航海等的重要性。特點是使用手機傾斜感應器測俯仰傾角。
 3. 研究目的：藉由測量已知高度的物體視角計算距離。（參考：如何才能瞄準目標，百發百中？）

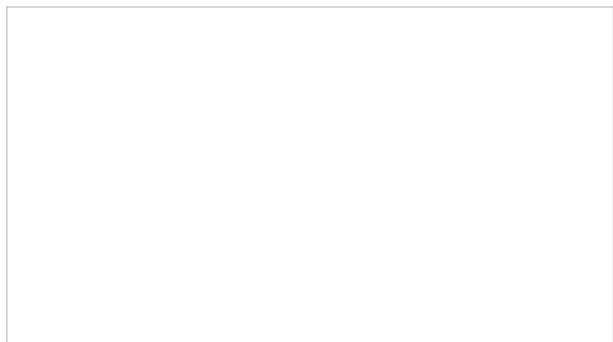
〔關鍵字〕

提示：兩隻眼睛看同一個物體，角度不同產生的深度感也不同，這也是從兩個不同位置觀察同一個物體時，此物體在視野中的位置變化，搜尋此種測距方法。除了角度以外，弧長與半徑比值是另一種角度，請搜尋此種角度，試著在其中新增兩個關鍵字。

〔材料與方法〕

提示：

1. 原理與公式：
 - (1) 繪出直角三角形，已知角度與對邊，求鄰邊（距離）。
 - (2) 寫三角函數與代號說明。（參考：如何才能瞄準目標，百發百中？）



2. 實驗裝置圖與材料表：
 - 準備鐵架臺、三爪夾、手機和直尺架設實驗儀器，並繪製實驗裝置圖。



實驗裝置圖

材料表	
名稱	規格或功能

〔 實驗流程 〕

提示：先測黑板高度，再以皮尺測黑板與鐵架距離，並將鐵架臺上的手機，以照相機放大觀看黑板底，同時上下調整鐵架臺上的手機，直到能以傾斜 App 測量地面水平。接著調整臺上手機的仰角，直到相機能放大觀看黑板頂，以傾斜 App 測量其仰角。由黑板高度、仰角計算與黑板間的距離，接著改變與黑板間距重複實驗，並記錄繪製成圖表。請將實驗流程以條列方式一步一步寫成實驗步驟。

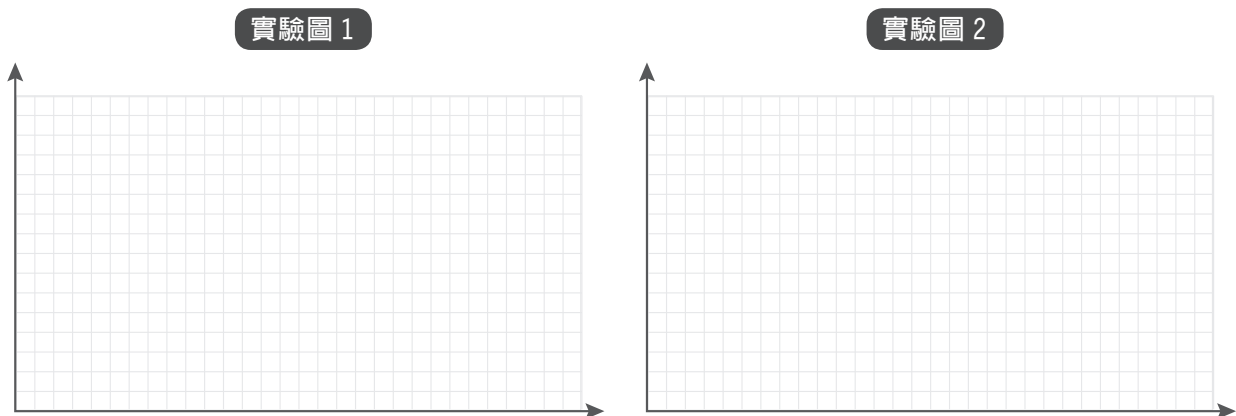
〔 結果 〕

提示：

1. 改變不同的距離，測量已知高度物體的視角，實驗圖表應選擇圓餅圖、長條圖還是折線圖？

2. 實驗圖 1 改變不同的距離，測已知高度物體的視角，其橫軸與縱軸各應為何？

3. 實驗圖 2 改變不同距離，由視角計算與物體的距離，其橫軸與縱軸各應為何？



〔 討論 〕

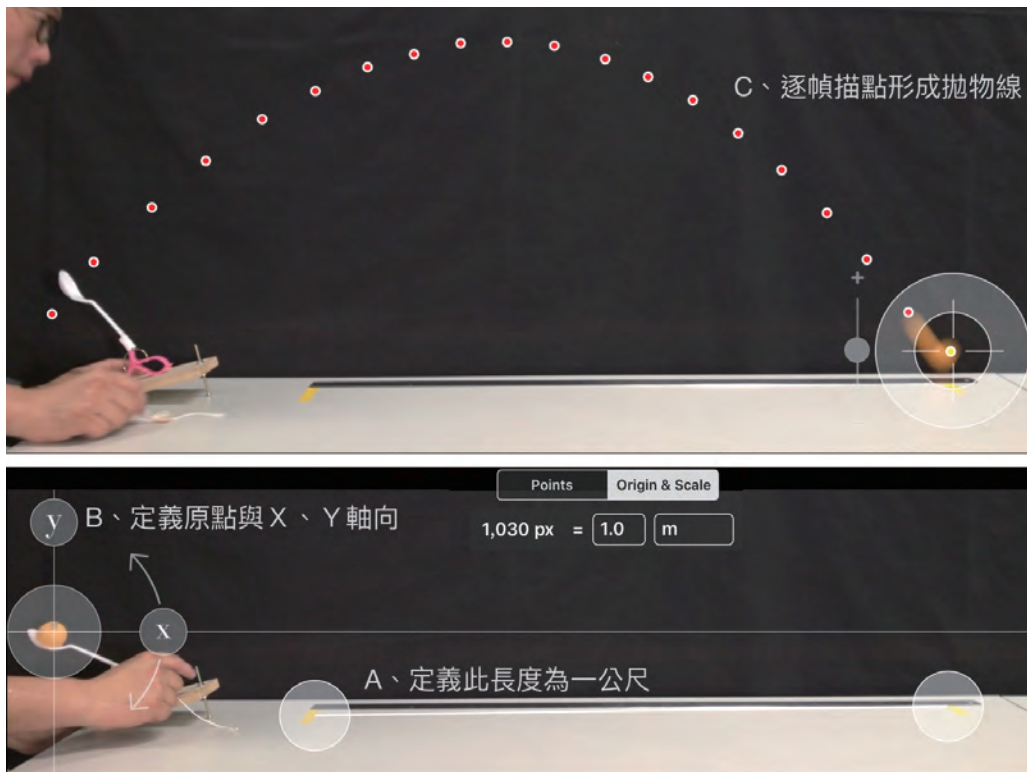
1. 手機傾斜 App 所能觀測的仰角，最小刻度為何？若以最小刻度仰角觀測，請計算出最遠能觀測的距離為何？

2. 由圖 2 得知，視差法測距與實際距離的誤差與仰角的關係為何？（是仰角越大誤差越大，還是仰角越小誤差越大，或是在某特定範圍的仰角誤差最大？）

湯匙投擲器與 Video Physics App



[前言 / Introduction]



↑ 以 Video Physics 分析湯匙投擲器將桌球擲出的軌跡

湯匙投擲器是以湯匙為槓桿，利用曬衣架的彈力，將桌球斜向拋射投擲出去。並以 iOS 的 Video Physics App，分析桌球飛行軌跡錄影畫面，印證其運動水平部分是否符合等速運動，鉛直部分是否為鉛直上拋運動，並且求出發射仰角與重力加速度。

Keywords

- ▶ 湯匙投擲器 Spoon launcher
- ▶ 拋體運動 Projectile motion
- ▶ 運動軌跡分析 Motion tracking analysis



材料與方法

Materials and Methods

使用斜向拋射的模型以及運動軌跡影像分析方法。

忽略空氣阻力，地表拋射運動模型 $v_x(t)=v_{x0}$ ， $v_y(t)=v_{y0} - gt$ 。

實驗步驟

- ① 製作湯匙投擲器。
- ② 調整發射仰角，控制曬衣夾張開間距。
- ③ 錄製球拋射飛行影片。
- ④ 以 Video physics App 分析運動軌跡。
- ⑤ 將數據傳至 Graphical Analysis GW App 獲得 V-t 圖。
- ⑥ 由 V-t 圖斜率得到重力加速度。

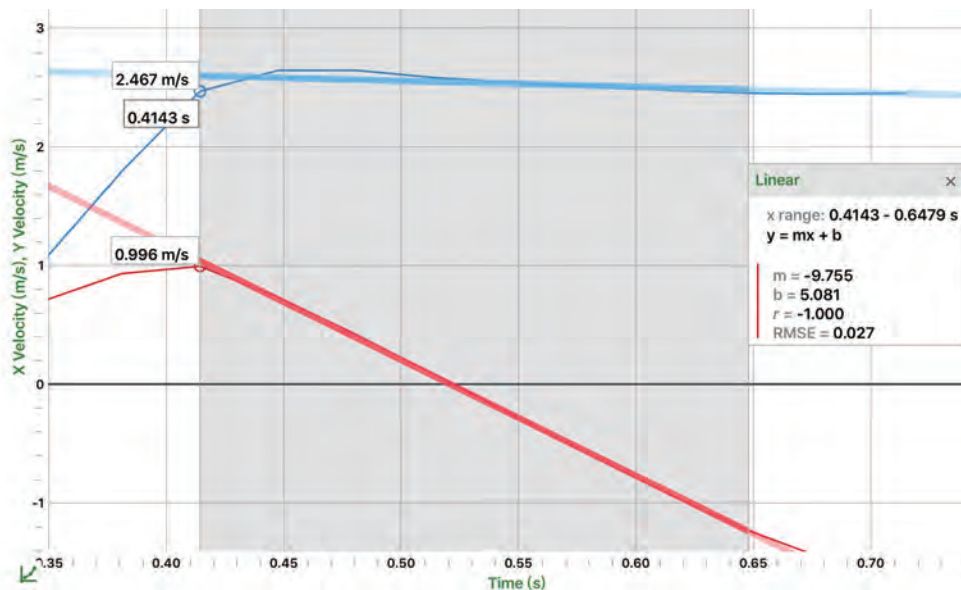
材料與用途

材料名稱 → 用途說明

- | | | |
|--------------------------|-----------------------------------|-----------------------|
| ① 塑膠湯匙 → 投擲臂 | ② 曬衣夾 → 提供彈力 | ③ 螺絲 → 調整發射仰角 |
| ④ 木板 → 投擲器底座 | ⑤ 膠帶 → 網綁湯匙與曬衣夾 | ⑥ iPad 或手機 → 錄影、分析與計算 |
| ⑦ Video Physics → 運動影片分析 | ⑧ Graphical Analysis GW → 數值圖表與分析 | |

結果
Results

下圖為桌球的速度與時間關係圖，曬衣夾經湯匙對球施力 0.414 秒，接著拋出，因有空氣阻力，球的水平速度（藍色細線）隨時間略為降低。而垂直速度（紅色細線）受重力作用，由實驗數據趨勢線斜率得重力加速度為 -9.76m/s^2 。



↑ Graphical Analysis GW 分析球斜向拋射速度與時間關係圖

發射的水平初速約為 2.47m/s，垂直初速約為 0.996m/s，以反三角函數計算得到發射仰角約為 22 度。

討論
Discussion

- ① 真實斜向拋射運動，水平速度需考慮空氣阻力，並非等速。
- ② 因為球發射時的位置並非在水平地面上，所以球上升的時間小於下降時間。
- ③ 投擲器若沒有緊緊固定在地面，射出球的同時，投擲器會後退。也因為彈力位能不只轉換到球，還有投擲器的動能，會使得球的飛行初速降低。
- ④ 未來可使用手機的傾斜 APP 測量發射前湯匙的傾角，與影片分析的發射仰角有何差異？
- ⑤ 未來可以更換張開曬衣夾的木塊厚度，藉由改變彈力位能，調整發射初速。
- ⑥ 未來可以將桌球換成不同大小與質量的球體，重複實驗。

Video Physics APP 介紹

Vernier 是 iOS (iPad、iPhone) 下的執行軟體，可針對物體運動的影片進行分析，分析前需定義 x、y 座標原點，以及長度比例設定。能將運動體自動描點繪出軌跡，得到 x-y 圖、x-t 圖、y-t 圖、 v_x -t 圖及 v_y -t 圖。傳至 Graphical Analysis 軟體後，作進一步統計分析。

〔 標題 〕

提示：前頁範例研究證實拋體為水平等速，鉛直為重力加速度。本實驗修改為研究曬衣夾的彈力與發射關係，請試著寫出標題。

〔 前言 〕

提示：1. 投石器的重要性：過去戰爭投石器可分為重力及彈力驅動投擲。
2. 特點：曬衣夾作為彈力驅動裝置；使用錄影分析拋體運動。
3. 研究目的：證明曬衣夾形變量與發射初速關係。

〔 關鍵字 〕

提示：想想看此投擲器驅動力是採用重力位能、彈力位能、化學能甚至電磁能？接著初速、仰角、飛行時間、射程等名詞，試著在其中新增兩個關鍵字。

〔 材料與方法 〕

提示：

1. 原理與公式：

建立簡易數學模型，彈力位能 = 球初動能（忽略湯匙等其他零件的動能）。

- 寫出彈力位能公式，並對代號做出解釋。（參考：懸吊系統如何撫平崎嶇的道路？）

- 寫出動能公式，並對代號做出解釋。（參考：運動員是如何擲球的？）

2. 實驗裝置圖與材料表：

製作實驗儀器和湯匙投擲器，並繪製實驗裝置圖。



材料表	
名稱	規格或功能

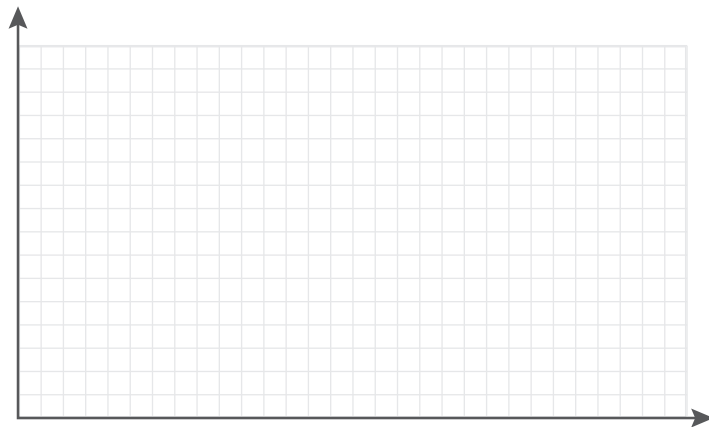
〔 實驗流程 〕

提示：先測量曬衣夾的最大張開距離，再等分為 5 等分，製作 5 種寬度木片。藉由逐漸改變木片寬度調整曬衣夾不同彈力位能（操控變因）。拍攝拋體影片以 Video Physics 分析球的初速（觀測結果），記錄繪製成圖表。請將實驗流程以條列方式寫出。

〔 結果 〕

提示：

1. 彈力位能 = 球初動能（忽略湯匙等其他物體動能）理論模型，實驗圖表應選擇圓餅圖、長條圖還是折線圖？
-
2. 因本研究為曬衣夾彈力位能轉換為桌球的動能，且期望圖表呈現正比關係，由理論模型決定橫軸與縱軸各為何？
-
3. 若橫軸為形變平方（ cm^2 ），縱軸為速度平方（ m^2/s^2 ），請先計算極值。例如：由最大形變平方決定橫軸刻度劃分，並由最大速度平方決定縱軸刻度劃分。別忘了補上一個不需要作實驗的數據點，即形變平方為零時，縱軸為速度平方亦為零（原點）。
4. 標記刻度和單位在圖表上，計算後填上數據，並沿各數據點繪上過原點的趨勢直線，最後在圖表下方註記圖片說明。



〔 討論 〕

1. 如果測量出曬衣夾彈力常數以及球的質量，是否可以在圖表中繪出簡易模型的理論值，並疊圖作比較？請問該如何作彈力常數的測量？
-
-
2. 如果不用影片軌跡分析求出初速，如何用飛行時間或者水平射程求得桌球的初速？
-
-