前　言

數學是一種語言，課堂上無論是數學知識的教授，數學技能的訓練，透過讓學生「有感」的學習，目的皆在教導學生於生活情境或學術情境中培養具有邏輯思維與解決問題的能力，也就是培養數學素養能力。如何透過評量來檢核學習的歷程呢？大學學測已朝「素養」甚至「跨領域」方向前進，綜合能力的培養刻不容緩。

「實用的規律科學」

生活中處處是數學，是否能看見並且應用就是很重要的能力了，生活中的問題通常比單純條件的數學問題複雜，需要透過跨域整合才能理出其規律與模式。

「閱讀理解能力」

數學應用是跨領域的，連結文字及符號語言，透過閱讀理解能力提升跨領域統整。

「有感的情境」

對於題型有感覺，較能產生意義，萌發解題的動機。這個情境或許不是生活中常見的情境，舉例來說像是資訊的情境，透過數學素養更能理解資訊程式語言。

「正確使用工具的素養」

圓規、三角板、直尺雖說是傳統的工具，但事實上運用這些工具來輔助思維或運算的機會還是偏少的，如再加上計算機、電腦、網路、手機等學習工具。數學的抽象感或許能更具象些。

生活通數學，數學通生活，期許能培養每個孩子「終身學習」的習慣。

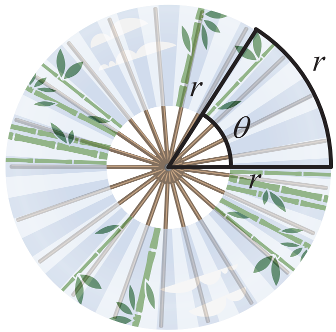
Contents

UNIT 01 ………… UNIT 30 ▷▷ | 目 次 |

01

扇子

▶ 有一把圓形的扇子，扇子的半徑為 r，若扇形對應的弧長為 r，則 θ 為 1 弧度，請用此圖說明 1 弧度小於 60 度。



難易度	★★★	範圍	1-1.1 弧度量

解

答案　參考解答，見詳解

解法

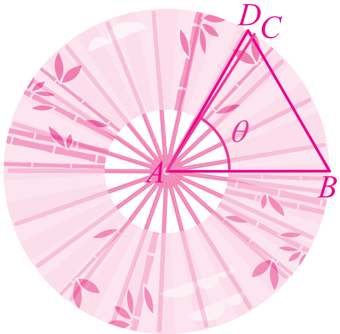
設 $\overline{AB}$ 為半徑，則 $\overline{AB}=r$

以 $\overline{AB}$ 為底作正三角形 ABD

則 $\overline{BD}=1=$ 原 $\overset{\frown}{BC}>\overline{BC}$

$\angle DAB=60°>\angle CAB=\theta$

$\theta=1$（弳）$<60°$



設計說明　透過幾何圖形，引入概念與正三角形連結，當弧長與半徑等長時，對應的圓心角大小，找到相關的性質。

學習內容　N-11A-1

弧度量：弧度量的定義，弧長與扇形面積，計算機的 RAD 鍵

學習表現　n-V-7

認識弧度量並能操作，理解並欣賞其作為角之度量的簡潔性。

02

｜賞月｜

▶ 小強與小花兩個人分別在臺灣 臺北與日本 東京兩地，兩人透過網路聊天，共同觀測天上皎潔明月，小強與小花使用手機 App 觀測月亮的仰角皆為 89.85 度，臺北與東京直線距離約 2103 公里，小花問小強：「我們看的是同一顆月亮，它離我們多遠？」（四捨五入取到小數後第二位）

難易度	★★	範圍	1-1.2 圓弧與圓面積計算

解

答案 約為 401643.41 公里

解法

如右圖 C 為月亮的所在位置

因兩人觀測月亮的仰角皆為

89.85 度

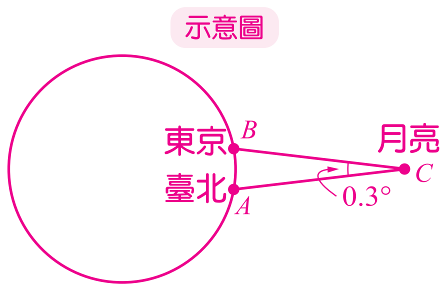
故 $\angle ACB=0.3°$

換成弧度為 $\dfrac{0.3\pi}{180}$

設 $\overline{AC}=r$

$\overline{AB}=2103=r\times\dfrac{0.3\pi}{180}$（因為角度太小，$\overset{\frown}{AB}\approx\overline{AB}$）

$r\approx401643.41$ 公里



設計說明 觀測遠距離的物體，透過弧度與弧長估算或許有頗大的誤差，但至少可以有個實際數字做個參考，也可以檢驗部分訊息。

學習內容 N-11A-1

弧度量：弧度量的定義，弧長與扇形面積，計算機的 RAD 鍵

學習表現 n-V-7

認識弧度量並能操作，理解並欣賞其作為角之度量的簡潔性。

03 ｜獵點計劃｜

▶ 由個人發起並逐漸轉變為全球活動的地理探勘計畫，稱為「獵點計劃」，目標是拜訪地球上整數經度與整數緯度的交會點，但為了避免獵點間過於接近，當經線間距少於赤道經線間距的 $\frac{2}{3}$ 時，只有 $\frac{2}{3}$ 的交點被指定為獵點（一級點），當經線間距只剩下赤道經線間距的 $\frac{4}{9}$（$=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$）時，則獵點的數量降至赤道處的一半，按此規律，會依序減少為赤道獵點數量的 $\frac{2}{3}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、……這些獵點的照片透過計劃平台在網路上發布。地球表面上某點的緯度是指某點與地球球心的連線和地球赤道面所夾的角度。地球半徑為 6371 公里。

(1) 當經線間距等於赤道經線間距的 $\frac{4}{9}$ 時，其緯線的半徑為？

(2) 緯度幾度起獵點的數量會降至赤道獵點數量的 $\frac{1}{2}$？（四捨五入取到小數點後第二位）

難易度 ★　　**範圍** 1-1.3 廣義角與三角比

解

答案

(1) 2831.56 公里

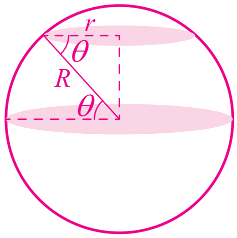
(2) 緯度 63.61 度起，獵點數目為赤道的一半

解法

經線間距為赤道經線間距的 $\frac{4}{9}$

兩弧長對應該圓的圓心角相等

表示該緯線半徑 r 為赤道半徑 R 的 $\frac{4}{9}$



(1) 該緯線半徑 $=6371\times\frac{4}{9}\approx2831.56$ 公里

(2) 獵點數目降至一半，由文本可知

當經線間距等於赤道經線間距的 $\frac{4}{9}$ 時

設該緯線某點與球心連線和赤道面夾角為 θ

$\cos\theta=\frac{r}{R}=\frac{4}{9}$，利用計算機 $\cos^{-1}\frac{4}{9}\approx63.61°$

設計說明

在我們周圍有些訊息「地球經緯度的資訊」，了解弧長與圓心角的關係，例如緯度的計算方式，可透過三角函數計算找到相關的資訊。

學習內容

N-11A-1

弧度量：弧度量的定義，弧長與扇形面積，計算機的 RAD 鍵

G-10-7

三角比的性質：正弦定理，餘弦定理，正射影。連結斜率與直線斜角的正切，用計算機的反正弦、反餘弦、反正切鍵計算斜角或兩相交直線的夾角，（三角測量 #）。

學習表現

n-V-7

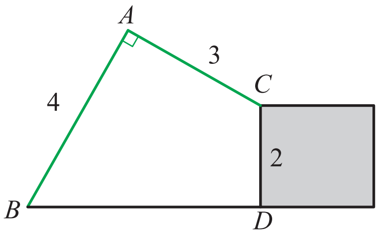
認識弧度量並能操作，理解並欣賞其作為角之度量的簡潔性。

s-V-1

理解三角比的意義，熟練其彼此關係與運算操作，能靈活應用於等式或函數，並能用以推論及解決問題。

04 ｜露營｜

▶ 露營區有一塊矩形巨石高（$\overline{CD}$）高 2 公尺，阿寶帶了一個綠色的帳篷架在巨石上，作為野炊的基地，帳篷架尺寸：其中一邊 $\overline{AB}=4$ 公尺、另一邊 $\overline{AC}=3$，且 $\angle A=90°$，預備在 A 處掛一盞露營燈，請問 A 點距離地面的高度為何？（使用計算機，四捨五入取至小數點後第四位）

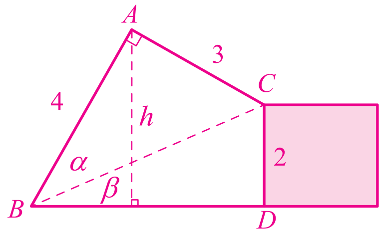


難易度 ★ 範圍 1-2.1 和差角公式

解

答案 3.4796 公尺

解法



如右圖連接 $\overline{BC}$

所求 $h=\overline{AB}\times\sin(\alpha+\beta)$

由直角三角形 ABC 中可知

$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$、$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$

由直角三角形 BCD 中可知

$\sin\beta=\dfrac{2}{5}$、$\cos\beta=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$=\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{21}}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{3\sqrt{21}+8}{25}$$

所求 $h=4\times\dfrac{3\sqrt{21}+8}{25}\approx3.4796$ 公尺

設計說明 透過輔助線，創造兩個直角三角形，利用三角函數和角公式解決問題。

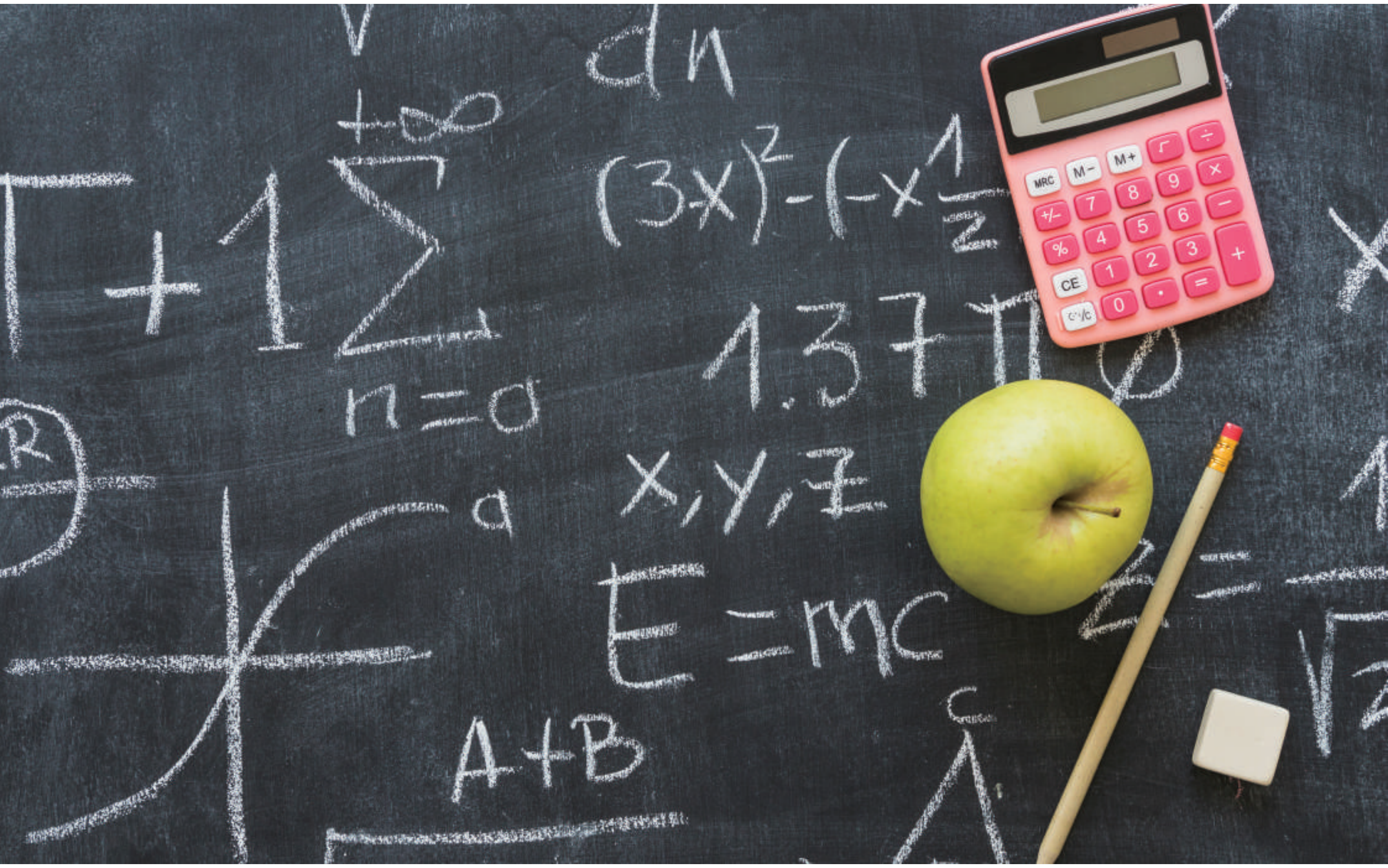
學習內容 G-11A-5

三角的和差角公式：正弦與餘弦的和差角、倍角與半角公式。

學習表現 s-V-1

理解三角比的意義，熟練其彼此關係與運算操作，能靈活應用於等式或函數，並能用以推論及解決問題。

05 ｜倍角公式｜



▶ 若 $\cos\theta\times\cos 2\theta\times\cos 4\theta=\frac{1}{8}$，且 $0<\theta<\frac{\pi}{6}$，試求角 θ 為何？

難易度 ★★　　範圍 1-2.2 二倍角公式

解

答案

$\theta=\dfrac{\pi}{9}$

解法

$$\begin{aligned}\cos\theta\times\cos 2\theta\times\cos 4\theta&=\frac{2\sin\theta\times\cos\theta\times\cos 2\theta\times\cos 4\theta}{2\sin\theta}\\&=\frac{\sin 2\theta\cos 2\theta\cos 4\theta}{2\sin\theta}\\&=\frac{2\times\sin 2\theta\cos 2\theta\cos 4\theta}{2\times 2\sin\theta}\\&=\frac{\sin 4\theta\cos 4\theta}{4\sin\theta}\\&=\frac{2\times\sin 4\theta\cos 4\theta}{2\times 4\sin\theta}\\&=\frac{\sin 8\theta}{8\sin\theta}\end{aligned}$$

$\Rightarrow\dfrac{\sin 8\theta}{\sin\theta}=1\Rightarrow\sin 8\theta=\sin\theta\Rightarrow 8\theta=\theta$ 或 $8\theta+\theta=\pi$

得 $\theta=0$ 或 $\dfrac{\pi}{9}$（0 不合，因為 $0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$）

故 $\theta=\dfrac{\pi}{9}$

設計說明

二倍角的應用輔以廣義角正弦函數的性質，解決問題。

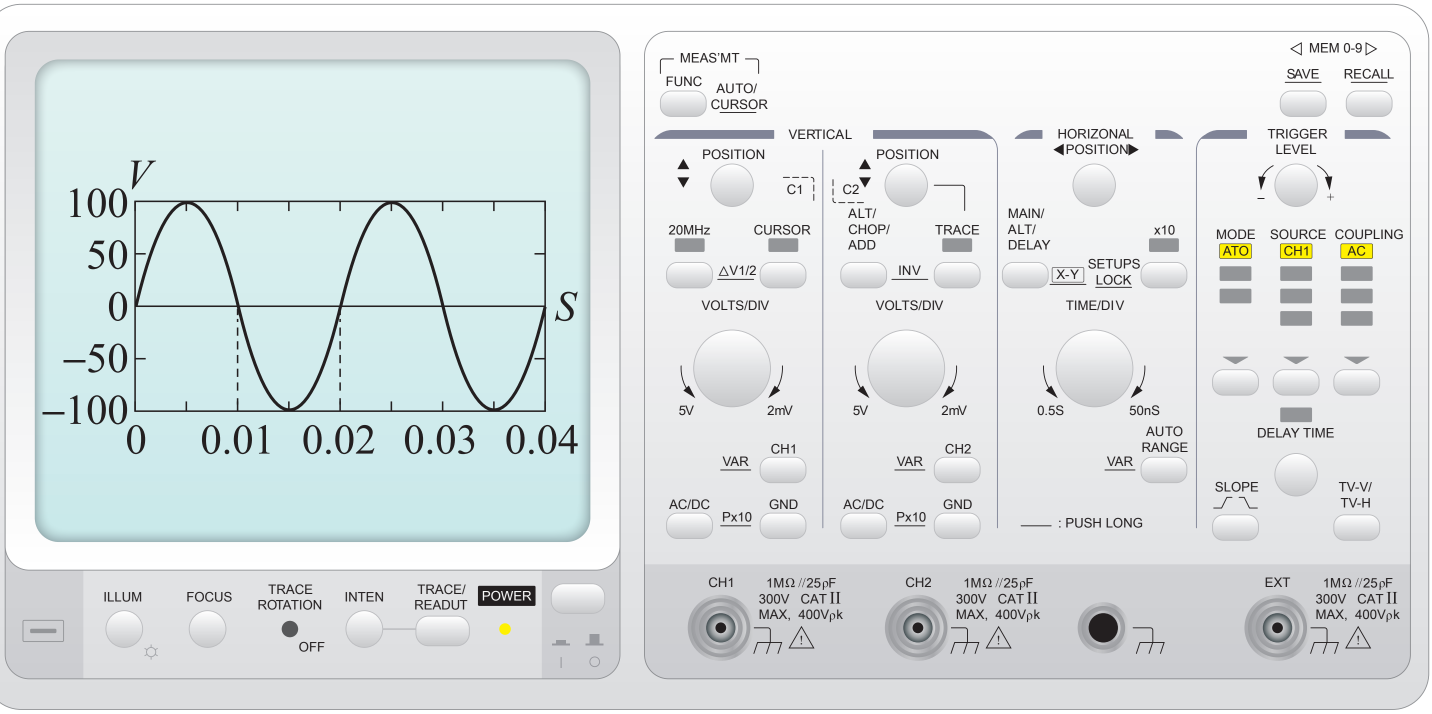
學習內容

G-11A-5
三角的和差角公式：正弦與餘弦的和差角、倍角與半角公式。

學習表現

s-V-1
理解三角比的意義，熟練其彼此關係與運算操作，能靈活應用於等式或函數，並能用以推論及解決問題。

06 示波器



▶ 設 α、β、γ、δ 依序為一、二、三、四象限角，且都介於 0 到 2π 之間。有一個示波器，呈現 $y=\sin x$ 的圖，已知 $\sin\alpha=\sin\beta$，且 $\sin\gamma=\sin\delta$，若需要加一個條件使得 $|\sin\alpha|=|\sin\beta|=|\sin\gamma|=|\sin\delta|$ 成立，請問加入的條件為 $\gamma-\alpha$ ＝________________。

難易度 ★★　　範圍 1-3.1 正餘弦的函數圖形

解

答案　$\gamma-\alpha=\pi$

解法

已知 $\sin\alpha=\sin\beta$，設 $0<k<1$

則 $y=k$ 與 $y=\sin x$ 交兩點的 x 坐標為 α、β

已知 $\sin\gamma=\sin\delta$

則 $y=-k$ 與 $y=\sin x$ 交兩點的 x 坐標為 γ、δ

因為 $\sin x$ 圖形特徵：α、β 對稱 $\frac{\pi}{2}\Rightarrow\beta-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-\alpha$

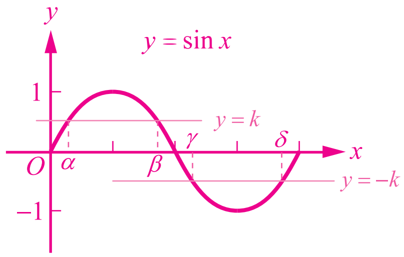
同理，γ、δ 對稱 $\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\delta-\frac{3\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}-\gamma$

且 $|\sin\alpha|=|\sin\beta|=|\sin\gamma|=|\sin\delta|$

得 $\beta-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-\alpha=\delta-\frac{3\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}-\gamma$

$\Rightarrow\frac{\pi}{2}-\alpha=\frac{3\pi}{2}-\gamma$

$\Rightarrow\gamma-\alpha=\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=\pi$



設計說明　生活中有許多的波形，理解其特徵與性質解決問題。

學習內容　F-11A-1

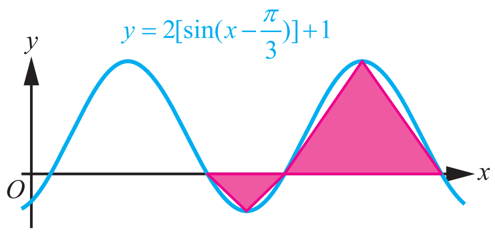
三角函數的圖形：sin,cos,tan 函數的圖形、定義域、值域、週期性，週期現象的數學模型。（cot，sec，csc 之定義與圖形 ※）

學習表現　f-V-3

認識三角函數的圖形特徵，理解其特徵的意義，認識以正弦函數為數學模型的週期性現象，並能用以溝通和解決問題。

07 | 海浪 |

▶ 一個人工模擬海浪池中，利用 $y=2[\sin(x-\frac{\pi}{3})]+1$ 造浪，如下圖所示，求兩個在浪內側的三角形的面積和。



難易度	★★	範圍	1-3.2 正餘弦函數的平移與伸縮

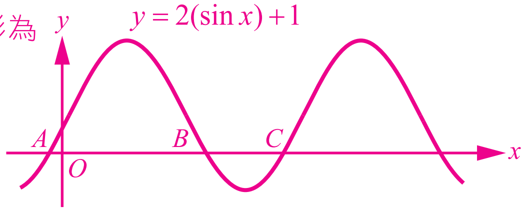
解

答案

面積和 $=\dfrac{7\pi}{3}$

解法

$y=2[\sin(x-\dfrac{\pi}{3})]+1$ 的圖形為



$y=2(\sin x)+1$ 向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$

平移不會改變三角形面積

故可以運用 $y=2(\sin x)+1$ 來計算

當 $\sin x=\pm1$ 時，y 有最大值 3，最小值為 -1

設 $2\sin x+1=0$，$\sin x=-\dfrac{1}{2}$

此時 $x=\dfrac{7\pi}{6}$、$\dfrac{11\pi}{6}$ 即為 B、C 點，$x=-\dfrac{\pi}{6}$為 A 點

大三角形面積 $=\dfrac{(\dfrac{7\pi}{6}-\dfrac{-\pi}{6})\times3}{2}=2\pi$

小三角形面積 $=\dfrac{(\dfrac{11\pi}{6}-\dfrac{7\pi}{6})\times1}{2}=\dfrac{\pi}{3}$

面積和 $=2\pi+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{7\pi}{3}$

設計說明

透過三角函數圖形特徵與性質以及函數圖形平移，處理問題。

學習內容

F-11A-1

三角函數的圖形：sin,cos,tan 函數的圖形、定義域、值域、週期性，週期現象的數學模型。（cot，sec，csc 之定義與圖形 ※）

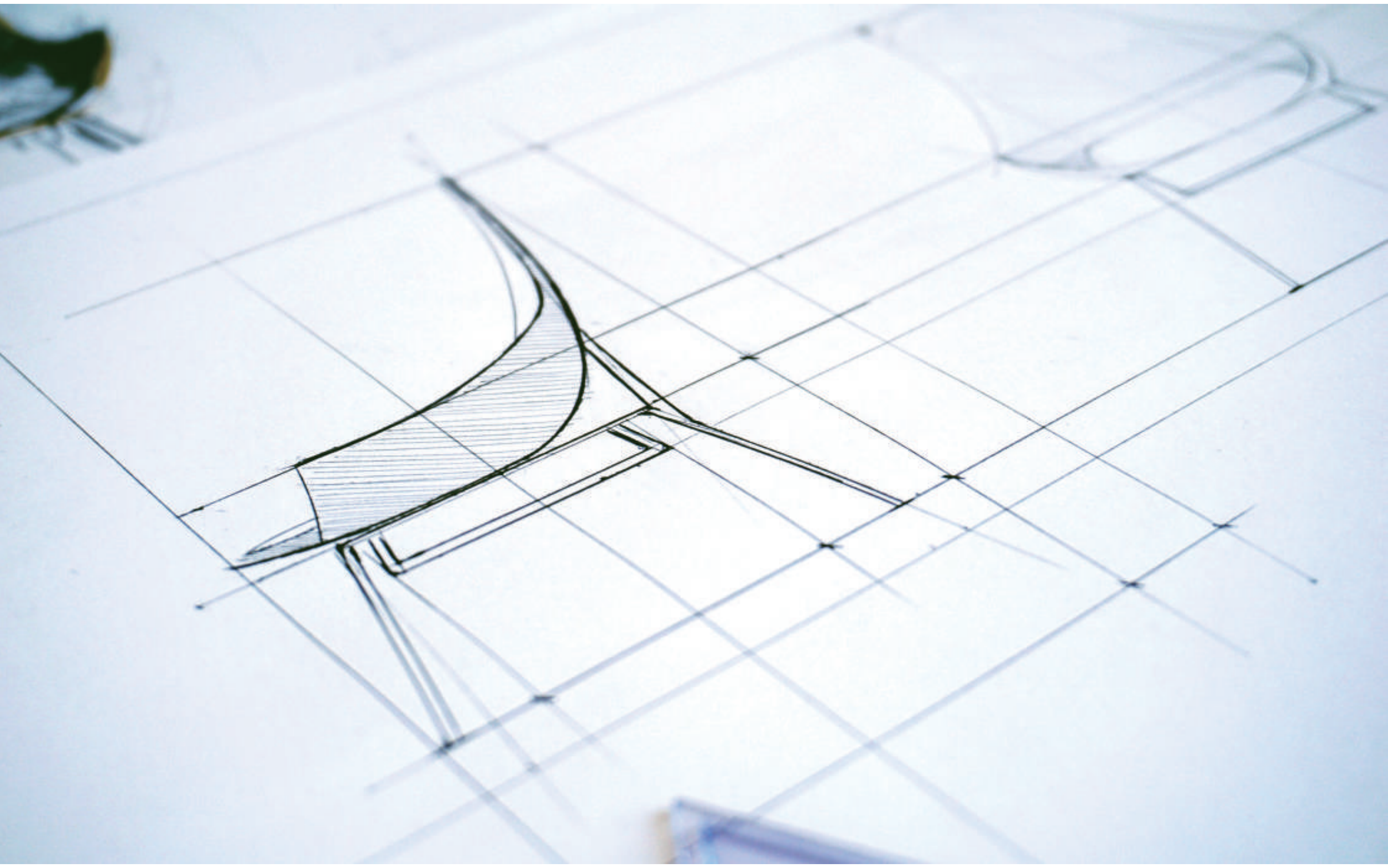
學習表現

f-V-3

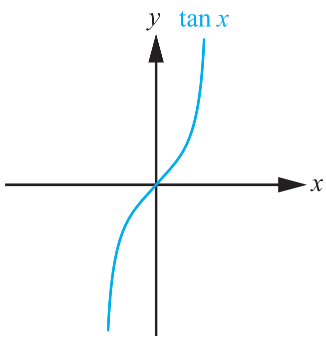
認識三角函數的圖形特徵，理解其特徵的意義，認識以正弦函數為數學模型的週期性現象，並能用以溝通和解決問題。

08

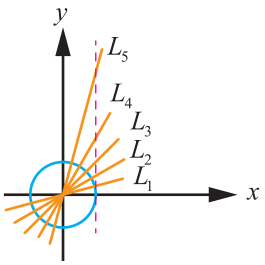
正切函數



▶ 圖一為 $y=\tan x$ 的圖形，圖二為五條直線（一次函數），相隔兩直線夾角均為 θ，請觀察左右兩圖，說明圖一與圖二之間的關聯性。



（圖一）



（圖二）

難易度 ★★★ 範圍 1-3.3 正切函數的圖形

解

答案 見詳解

解法

設圖二中的直線斜率分別為 m_1、m_2、m_3、m_4、m_5
得 $m_1=\tan\theta$、$m_2=\tan 2\theta$、$m_3=\tan 3\theta$、$m_4=\tan 4\theta$、$m_5=\tan 5\theta$
由圖二可以觀察到
各直線與 $x=1$ 交點間距越來越大
θ 即為圖一的 x 坐標
斜率 m 值即為圖一的 y 坐標
圖二在 x 軸上半部可繪製出圖一的右半部
若直線往 x 軸下繪製的話，斜率為負
即可繪製出圖一的左半部

設計說明 斜率與 $\tan\theta$ 的關係，透過函數圖形的理解，找出其性質。

學習內容

F-11A-1
三角函數的圖形：sin,cos,tan 函數的圖形、定義域、值域、週期性，週期現象的數學模型。（cot,sec,csc 之定義與圖形 ※）

學習表現

f-V-3
認識三角函數的圖形特徵，理解其特徵的意義，認識以正弦函數為數學模型的週期性現象，並能用以溝通和解決問題。

09 ｜水上遊樂園｜

▶ 有一個水上樂園，長方體水槽兩端分別有兩組造浪器，左側為主要造浪器，利用程式（例如 $\sin x+3\cos x$）造浪，右側為緩衝造浪器，啟動後，主浪到了右側後會主動發出波將浪去除，某日左側造浪器發出 $\sin x+\cos x$ 的浪，右側緩衝器啟動後故障，需手動輸入程式才能造浪，但右側緩衝器只能製造 $a\sin(x+t)$ 的波，請問應該輸入________________方能將浪去除。

難易度 ★★　　**範圍** 1-4.2 正弦與餘弦的疊合

解

答案

$\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{5\pi}{4})$

解法

需要輸入的方程式為

$$
\begin{aligned}
&-(\sin x+\cos x)\\
&=\sqrt{2}(\frac{-1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{-1}{\sqrt{2}}\cos x)\\
&=\sqrt{2}(\sin x\cos\frac{5\pi}{4}+\cos x\sin\frac{5\pi}{4})\\
&=\sqrt{2}\sin(x+\frac{5\pi}{4})
\end{aligned}
$$

設計說明

生活中有許多的波形，理解其原理可以透過數學處理的問題。

學習內容

F-11A-2

正餘弦的疊合：同頻波疊合後的頻率、振幅。

學習表現

f-V-3

認識三角函數的圖形特徵，理解其特徵的意義，認識以正弦函數為數學模型的週期性現象，並能用以溝通和解決問題。

10 ｜波的疊合｜

▶ 有兩個波 $f(x)=2\sin x$、$g(x)=5\cos x$，欲將兩個波疊合 $(f(x)+g(x))$，猜想可能為 $a\sin(x+\alpha)$ 或 $b\cos(x+\beta)$ 的形式。其中 $-\frac{\pi}{2}<\alpha$、$\beta<\frac{\pi}{2}$，請說明 a 與 b 的關係、α 與 β 的關係為何？

難易度 ★★　　**範　圍** 1-4.2 正弦與餘弦的疊合

解

答　案

$a=b$、$\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}$

解　法

$f(x)+g(x)=2\sin x+5\cos x=\sqrt{29}(\dfrac{2}{\sqrt{29}}\sin x+\dfrac{5}{\sqrt{29}}\cos x)$

若 $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{29}}$、$\sin\alpha=\dfrac{5}{\sqrt{29}}$，得 $f(x)+g(x)=\sqrt{29}(\sin(x+\alpha))$

故 $a=\sqrt{29}$

若 $\cos\beta=\dfrac{5}{\sqrt{29}}$、$\sin\beta=-\dfrac{2}{\sqrt{29}}$，得 $f(x)+g(x)=\sqrt{29}(\cos(x+\beta))$

故 $b=\sqrt{29}$

由上述可得 $a=b$

因為 $\cos\alpha=-\sin\beta$ 且 $\sin\alpha=\cos\beta$

所以 α 與 $-\beta$ 為互餘關係，即 $\alpha+(-\beta)=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}$

設計說明

透過推理、歸納的方式來找出三角函數疊合的模式。

學習內容

F-11A-2

正餘弦的疊合：同頻波疊合後的頻率、振幅。

學習表現

f-V-3

認識三角函數的圖形特徵，理解其特徵的意義，認識以正弦函數為數學模型的週期性現象，並能用以溝通和解決問題。

11

▶ 有廠商聲稱「鹼性離子水可調節血液的酸鹼值使之成弱鹼性」，人體血液的正常 pH 值為 7.3 ～ 7.4，阿峰體重 60 公斤，血液量大約 4.5 公升，今測 pH 值為 7.2 呈現「酸中毒」狀態。

(1)若按照廠商宣稱可中和至正常的 pH 值（7.4），用 pH=9.0 之鹼性離子水（提供 10^{-9} 莫耳／公升的 $[H^+]$）幾毫升？（$pH=-\log [H^+]$，$[H^+]$：氫離子的莫耳濃度，四捨五入取到小數點後第一位）

再來，「酸鹼體質說」這套說法並沒有確實的科學根據佐證。人體為了不同的需要，本來就有不同的酸鹼度。舉例：口腔中唾液的 pH 值為 6.5 ～ 7.5、胃酸的 pH 值是 1 ～ 2 、血液 pH 值則是會維持在 7.3 ～ 7.4。根據腎臟科醫師的建議：「自己體重 ×30」毫升，就是你每天需要喝水的量！依此段說明，

(2)阿峰每天喝的水量應為多少毫升？

(3)請問阿峰喝這樣的水足夠中和目前的血液酸鹼值嗎？

（莫耳濃度 = 溶液莫耳數／溶液體積（公升）、酸鹼中和：溶液 A 的氫離子莫耳數 + 溶液 B 的氫離子莫耳數 = 混合溶液的氫離子莫耳數）

難易度 ★　　**範圍** 2-1.2 對數的定義

解

答案 (1) 2699.8 毫升　(2) 1800 毫升　(3) 無法

解法

(1) 阿峰血液 pH$=7.2$

所以血液中氫離子濃度 $7.2=-\log[H^+]\Rightarrow[H^+]=10^{-7.2}$

設阿峰喝 x 公升的鹼性離子水，$[H^+]$ 的濃度為 10^{-9}

得 $x\times10^{-9}+4.5\times10^{-7.2}=(x+4.5)\times10^{-7.4}$

$\Rightarrow x\approx2.6998$ 公升 $=2699.8$ 毫升

(2) $60\times30=1800$ 毫升

(3) 雖然阿峰喝 1800 毫升的水 <2699.8 毫升

但是本文中提到此說法並沒有被科學證實

所以喝再多鹼性離子水也不能保證能中和血液的酸鹼值

設計說明

透過化學酸鹼中和概念，結合數學指對數計算，可以求出答案，但實際上訊息的真偽仍須專家解釋說明。

學習內容

A-11A-4

對數律：從 10^x 及指數律認識 log 的對數律，其基本應用，並用於求解指數方程式。

學習表現

a-V-1

理解多項式、分式與根式對應實數之運算規則，理解指數、對數的運算規則，並能用於數學推論。

12 ｜案發現場｜

▶ 發生一起密室殺人事件（純屬虛構），小四郎是一名偵探，觀察現場證據，有一個水盆，以及蚊子屍體，小四郎推理兇手是利用蚊子進行殺人手段。若在安靜房間中一隻蚊子發出聲音約 10 分貝，且室內分貝數達 190 分貝，則人會因此死亡，小四郎認定嫌犯是利用將孑孓放在水盆培養蚊子，藉此達到殺人目的。請問兇手需要多少隻蚊子才能達到 190 分貝？

（聲音的強度是用每平方公尺多少瓦特（W ／ m^2）來衡量，一般人能感覺出聲音的最小強度為 $I_0=10^{-2}$（W ／ m^2）；當測得的聲音強度為 I（W ／ m^2）時，所產生的噪音分貝數 d 為 $d(I)=10\times\log\dfrac{I}{I_0}$。）

難易度 ★ 範圍 2-1.3 對數的性質

解

答案

10^{18} 隻

解法

根據本文 $d(I)=10\times\log\frac{I}{I_0}$，得 $10=10\times\log\frac{I}{I_0}$

即一隻蚊子發出的聲音強度為 $I=10^{-11}$ 瓦特

設現場有 x 隻蚊子，發出的聲音強度為 $x\times10^{-11}$，

要達到 190 分貝

則 $190=10\times\log\frac{x\times10^{-11}}{10^{-12}}\Rightarrow19=\log 10x$

$\Rightarrow19=1+\log x\Rightarrow\log x=18\Rightarrow x=10^{18}$

故需要 10^{18} 隻蚊子

設計說明

聲音分貝感覺差距沒有很大，實際上聲音強度的累加是不容易的。

學習內容

A-11A-4

對數律：從 10^x 及指數律認識 log 的對數律，其基本應用，並用於求解指數方程式。

學習表現

a-V-1

理解多項式、分式與根式對應實數之運算規則，理解指數、對數的運算規則，並能用於數學推論。

13 ｜服用安眠藥｜

小敏隔天要參加學測，由於考前一週每晚都難以入眠，尋求吃安眠藥幫助睡眠。試利用以下表格與資訊，請問

(1) 小敏應該吃哪一款安眠藥？

(2) 隔天早上 9 點 15 分進行學測考試，應該在今晚幾點前吃安眠藥？希望能在隔天早上 7 點整使得體內藥物殘留為 5% 以下？（使用安眠藥，應該經過醫師處方與建議，此題僅供計算參考）

◎三款安眠藥

款式	短效型	中效型	長效型
半衰期	半衰期 2.5 個小時	半衰期 7 小時	半衰期 11.5 小時

◎失眠類型建議用藥類型：

入睡困難型：促進入睡，一覺到天亮，適合使用：作用快、短效型的藥物。

早醒型：適合使用：作用速度普通、中效型的藥物。

入睡困難又片段早醒型：適合使用：作用快、長效型的藥物。

難易度 ★　　**範圍** 2-1.3 對數的性質

解

答案 (1) 短效型安眠藥　(2) 需要晚上 8 點 12 分前服藥入睡

解法 (1) 小敏需要入睡一覺到天亮，所以選擇短效型安眠藥

(2) 設經過 t 個 2.5 小時後，藥物殘留 $=(\frac{1}{2})^t<5\%$

得 $2^{-t}<\frac{1}{20}\Rightarrow -t\log 2<-\log 20\Rightarrow t>\frac{\log 20}{\log 2}\approx 4.3219$

所以需要 $4.3219\times 2.5=10.80475$ 小時，大約 10 小時 48 分

因此，需要在晚上 8 點 12 分前服用藥物

設計說明 透過半衰期的計算，可以理解藥物的資訊，並作出適當的判斷。

學習內容 A-11A-4

對數律：從 10^x 及指數律認識 log 的對數律，其基本應用，並用於求解指數方程式。

學習表現 a-V-1

理解多項式、分式與根式對應實數之運算規則，理解指數、對數的運算規則，並能用於數學推論。

14

藥物殘留

▶ 觀察人體內各個時間藥物反應殘留量（近似值），製作如下表數據

時間 t（時）	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2
殘留量 s（公克）	2.0000	1.3406	0.8986	0.6024	0.4038	0.2707	0.1814
時間 t（時）	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4	…
殘留量 s（公克）	0.1216	0.0815	0.0546	0.0366	0.0246	0.0165	…

請以 $s=f(t)=a\times b^t$ 去預測當 $t=5$ 時，殘存量為何？（使用計算機，四捨五入取到小數點後第六位）

難易度 ★　　範圍 2-2.1 指數與對數函數

解

答案

殘存量約 0.000091 公克

解法

由上方表格數據可推得

$f(0)=a\times b^0\Rightarrow a=2$

$f(0.2)=2\times b^{0.2}\approx 1.3406\Rightarrow b\approx 0.1353$

$f(0.4)=2\times b^{0.4}\approx 0.8986\Rightarrow b\approx 0.1353$

$f(0.6)=2\times b^{0.6}\approx 0.6024\Rightarrow b\approx 0.1353$

依序檢查 $b\approx 0.1353$

當 $t=5$ 時，$s=f(5)=2\times 0.1353^5\approx 0.000091$ 公克

設計說明

觀察數據，利用適當的模型，可以作為預測依據。

學習內容

F-11A-4

指數與對數函數：指數函 數及其圖形，按比例成長或衰退的數學模型，常用對數函數的圖形，在科學和金融上的應用。

學習表現

f-V-4

認識指數與對數函數的圖形特徵，理解其特徵的意義，認識以指數函數為數學模型的成長或衰退現象，並能用以溝通和解決問題。

15

咖啡

▶ 小蜜在一間公司擔任總經理秘書，總經理十分重視生活品質，例如喝咖啡一定要喝溫度約 30 度的咖啡，令小蜜困擾的是公司的飲水機水溫是 50 度，總經理每天固定時間上班，今天辦公室室溫維持攝氏 25 度，咖啡泡完 10 分鐘溫度由攝氏 50 度降為攝氏 40 度，利用牛頓冷卻定律：$T(t)=$ 室溫 $+(T_0-$ 室溫 $)\times e^{-\alpha(t-t_0)}$，其中 $T(t)$ 為物品的溫度，T_0 為 $t=t_0$ 時的溫度、α 為一個常數。請問小蜜應該在總經理進辦公室幾分鐘前開始泡咖啡？（無條件進位取到整數位）

難易度	★	範圍	2-2.3 自然常數 e

解

答案　提前 32 分鐘

解法

根據冷卻定律 $T(t)=$ 室溫 $+(T_0-$ 室溫 $)\times e^{-\alpha(t-t_0)}$

$40=25+(50-25)\times e^{-\alpha\times 10}$

$\Rightarrow 15=25\times e^{-10\alpha}\Rightarrow\dfrac{3}{5}=e^{-10\alpha}\Rightarrow\ln 3-\ln 5=-10\alpha\Rightarrow\alpha=0.0511$

當總經理需要 30 度的咖啡時

$30=25+(50-25)\times e^{-0.0511\times t}$

$\Rightarrow\dfrac{5}{25}=e^{-0.0511t}\Rightarrow-\ln 5=-0.0511t\Rightarrow t\approx 31.4958\approx 32$

故小蜜需要提前 32 分鐘泡咖啡

設計說明　觀察指數模型，代入適當數字，利用對數性質，解決生活問題。

學習內容

F-11A-4

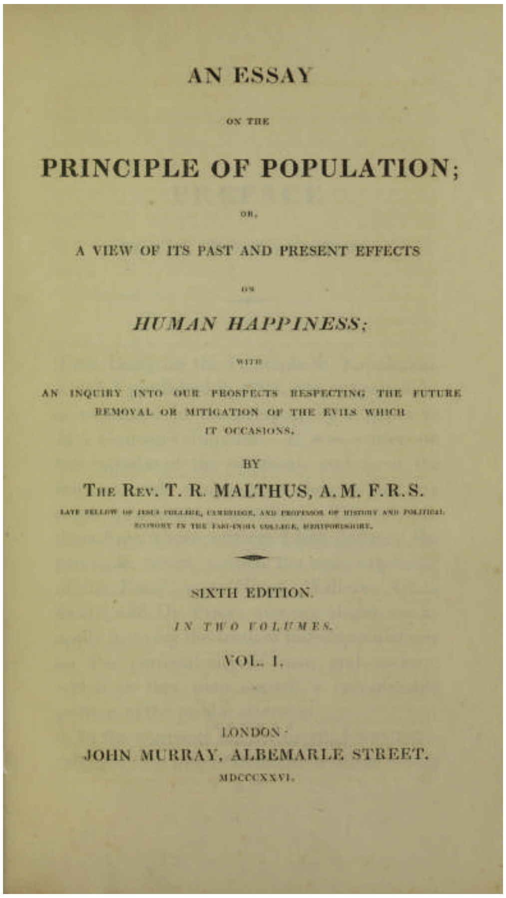
指數與對數函數：指數函 數及其圖形，按比例成長或衰退的數學模型，常用對數函數的圖形，在科學和金融上的應用。

學習表現

f-V-4

認識指數與對數函數的圖形特徵，理解其特徵的意義，認識以指數函數為數學模型的成長或衰退現象，並能用以溝通和解決問題。

16 人口模型



AN ESSAY

ON THE

PRINCIPLE OF POPULATION;

OR,

A VIEW OF ITS PAST AND PRESENT EFFECTS

ON

HUMAN HAPPINESS;

WITH

AN INQUIRY INTO OUR PROSPECTS RESPECTING THE FUTURE REMOVAL OR MITIGATION OF THE EVILS WHICH IT OCCASIONS.

BY

THE REV. T. R. MALTHUS, A.M. F.R.S.

LATE FELLOW OF JESUS COLLEGE, CAMBRIDGE, AND PROFESSOR OF HISTORY AND POLITICAL ECONOMY IN THE EAST-INDIA COLLEGE, HERTFORDSHIRE.

SIXTH EDITION.

IN TWO VOLUMES.

VOL. I.

LONDON:

JOHN MURRAY, ALBEMARLE STREET.

MDCCCXXVI.

▶ 西元 1960 年地球上世界人口數量約為 298166 萬人，1965 年地球上世界人口數量約為 333487 萬人，根據馬爾薩斯的人口模型：

$$P(t)=P_0\times e^{\lambda(t-t_0)}\text{。}$$

(1)根據馬爾薩斯人口模型，求 λ 為何？（四捨五入取到小數點後第四位）

(2)利用此模型計算西元 2010 年世界人口數。（四捨五入取到整數位，單位萬人）

(3)若西元 2010 年世界人口數為 683059 萬人，與模型計算出來的結果有甚麼差距？請與同學討論看看原因。

難易度 ★★ **範　　圍** 2-2.3 自然常數 e

解

答　　案 (1) 0.0224　(2) 913793 萬人　(3) 見詳解

解　　法 (1) 根據馬爾薩斯人口模型：$P(t)=P_0\times e^{\lambda(t-t_0)}$

$$333487=298166\times e^{\lambda\times 5}\Rightarrow\frac{3334487}{298166}=e^{5\lambda}$$

$$\Rightarrow\lambda=\frac{\ln\frac{3334487}{298166}}{5}\approx 0.0224$$

(2) $P(2010)=333487\times e^{0.0224\times(2010-1965)}\approx 913793$ 萬人

(3) 由模型預估 2010 年的人口 913793 萬人遠大於實際人口 683059 萬人，可能原因是在人口相對少時，基本上模型是沒有問題的，但實際上當人口相當多時，人口成長率便會逐漸趨緩，且越靠近人口上限時，成長率越小。另外，法國國家人口研究所最新報告顯示，預估西元 2050 年全世界人口將高達 97 億人。

設計說明 使用模型作為推估趨勢的方式，須考慮條件的差異與參數的修正。

學習內容 F-11A-4

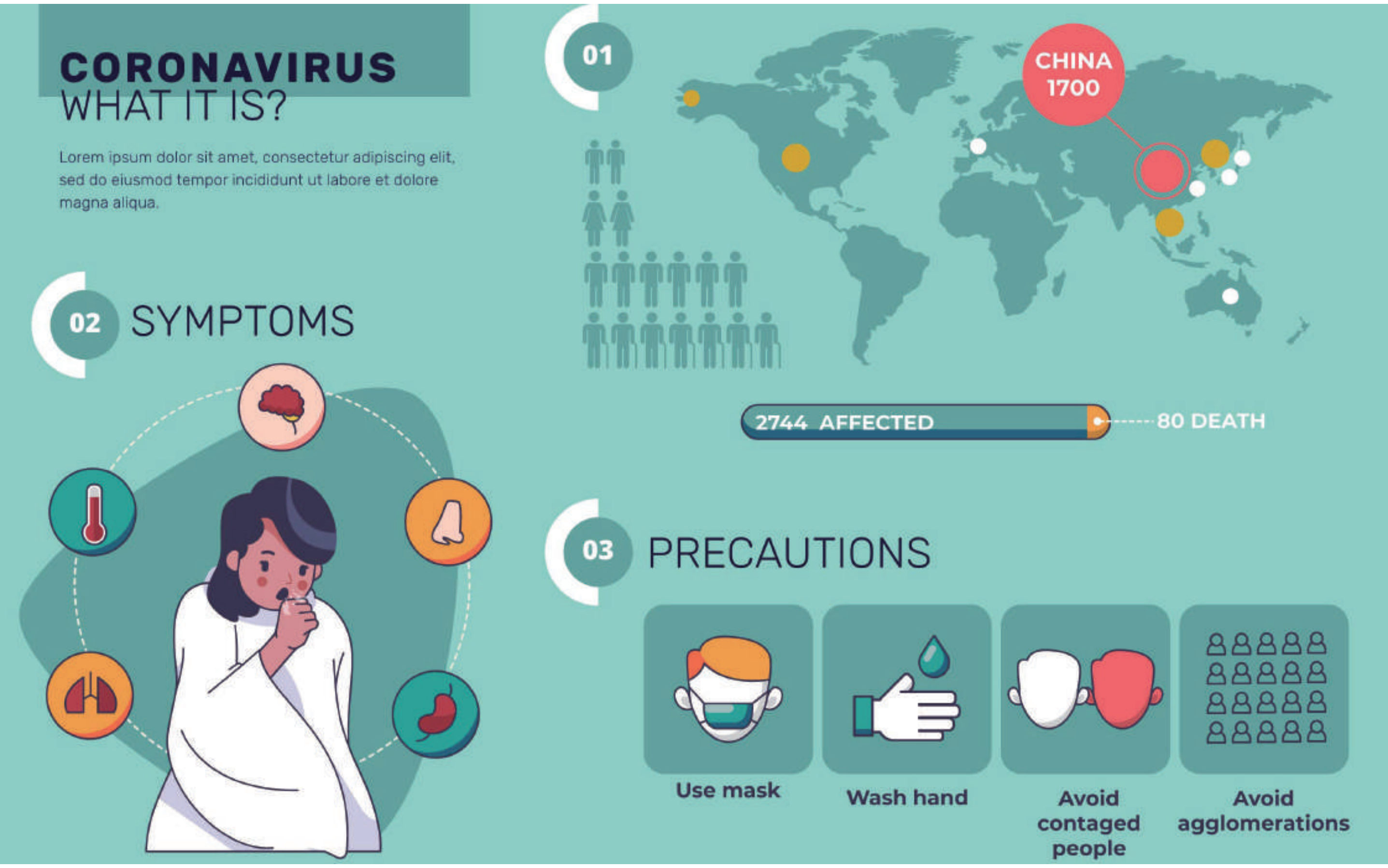
指數與對數函數：指數函數及其圖形，按比例成長或衰退的數學模型，常用對數函數的圖形，在科學和金融上的應用。

學習表現 f-V-4

認識指數與對數函數的圖形特徵，理解其特徵的意義，認識以指數函數為數學模型的成長或衰退現象，並能用以溝通和解決問題。

17

傳染病



▶ 基礎傳染數（R0，Basic reproduction number），簡單說就是：平均一個感染者可以傳染給多少人，如 SARS 的 R0：2~5、流感的 R0：2 ～ 3、麻疹的 R0：12 ～ 18。這個數值會隨著變因不同而發生變化，而非固定的一個數字。若今天爆發新型流感病毒的疫情，專家學者研究之後提供相關的數據，其 R0 值為 3.4，且平均約 2.34 天會傳染給別人，假設某校師生共 4000 人，其中有一名老師感染此新流感（全校第一位，且未就醫），請預估全校約幾天後超過一半的師生會被傳染？（四捨五入取到整數位）

難易度 ★

範圍 2-3.1 指數與對數方程式及不等式

解

答案 14 天

解法

根據題意 R0 值為 3.4，可知若 1 人染病的話，則會傳染給 3.4 人

設公比 r 為 3.4、第 n 個 2.34 天傳染人數會超過 2000 人

$1+3.4+3.4^2+3.4^3+\cdots+3.4^n>2000$

$\frac{1(3.4^{n+1}-1)}{3.4-1}>2000$

$3.4^{n+1}-1>2000\times2.4$

$3.4^{n+1}>4801$

$n+1>\log_{3.4}4801=\frac{\log 4801}{\log 3.4}\approx6.9266$

$n>5.9266$

所以 $5.9266\times2.34=13.8682\approx14$ 天

設計說明

新聞媒體資訊的解讀十分重要，透過理解作出有用的判讀，對於資訊能有更適合的解讀與判斷

學習內容

F-11A-4

指數與對數函數：指數函數及其圖形，按比例成長或衰退的數學模型，常用對數函數的圖形，在科學和金融上的應用。

學習表現

f-V-4

認識指數與對數函數的圖形特徵，理解其特徵的意義，認識以指數函數為數學模型的成長或衰退現象，並能用以溝通和解決問題。

18 ｜費馬數｜

皮埃爾・德・費馬


李昂哈德・尤拉

▶ 西元 1640 年，費馬提出一個猜想，認為所有的費馬數都是質數，其中費馬數的表達式：

$$F_n=2^{2^n}+1，n=0, 1, 2, \cdots。$$

這一猜想對於 $F_0 \sim F_4$ 都成立，但是西元 1732 年尤拉否定了這個猜想，他給出了分解式：$F_5=2^{32}+1=4294967297=641\times6700417$。

事實上 $F_5 \sim F_{11}$ 已經被完全分解了，可以看出 F_5 以後的費馬數都非常大，請問

(1)F_6 是幾位數？

(2)F_6 數字最高三位是什麼數字？

難易度	★★	範圍	2-3.2 首數與尾數

解

答案　(1) 20 位數　(2) 184

解法

$F_6=2^{2^6}+1=2^{64}+1$

$\Rightarrow \log(2^{64}+1)\approx \log 2^{64}=64\times\log 2\approx 19.2659$

可得首數 $=19\Rightarrow 20$ 位數

尾數 $=0.2659\Rightarrow \log a=0.2659\Rightarrow a=10^{0.2659}\approx 1.8446$

所以前三位數字為 184

設計說明

對於數字很大的指數，運用對數運算與科學記號概念，可以估算數字資訊。

學習內容

F-11A-4

指數與對數函數：指數函數及其圖形，按比例成長或衰退的數學模型，常用對數函數的圖形，在科學和金融上的應用。

學習表現

f-V-4

認識指數與對數函數的圖形特徵，理解其特徵的意義，認識以指數函數為數學模型的成長或衰退現象，並能用以溝通和解決問題。

19 電動摩托車

花蓮縣	汰舊並新購電動機車
經濟部工業局補助	-$7,000
行政院環保署補助	-$3,000
地方政府環保局補助	-$500
CBS 連動式煞車系統補助	-$1,000
花東基金	-$10,000
建議售價	$54,980
扣除補助後購車總金額	$33,480

新北市	汰舊並新購電動機車
經濟部工業局補助	-$7,000
行政院環保署補助	-$3,000
地方政府環保局補助	即將公布
CBS 連動式煞車系統補助	-$1,000
建議售價	$54,980
扣除補助後購車總金額	$43,980

▶ 阿宇計劃在自己十八歲生日時能買一台電動機車，家裡面恰好有一部機車老舊可以汰換，上圖為收集到的相關資訊，不同居住縣市因補助不同，故電動車價格也略不同，其中以花蓮最便宜。阿宇戶口在新北市，試算阿宇若使用 24 期 0 利率，平均每一期需要支付多少錢？若刷聯名卡一次付清，則可獲得 1% 現金回饋，請問阿宇該使用 24 期 0 利率還是刷卡一次付清較省錢？（銀行年利率 1.09% 每月複利計息，四捨五入取至小數點後第一位）

難易度 ★★　範圍 2-3.3 指數與對數的運用

解

答案

(1) 24 期 0 利率，每期需付 1832.5 元
(2) 選擇 24 期 0 利率優於一次付清

解法

(1) 因為阿宇住在新北市，參考新北市的價格
扣除補助後購車總金額為 43980 元
24 期 0 利率的話，平均每期需要支付 1832.5 元
若扣除首次付款 1832.5 元，其餘存入銀行，依年利率 1.09%
每個月領出 1832.5 元繳款
(2) 2 年後的本利和為

$$1832.5\times(1+\frac{1.09\%}{12})^{23}+1832.5\times(1+\frac{1.09\%}{12})^{22}+\cdots+1832.5$$

$$=\frac{1832.5\times(1-1.000908^{24})}{1-1.000908}=44442.3117$$

$44442.3117-1832.5\times24=462.3117$
選擇 24 期 0 利率優於一次付清

設計說明

對於金融產品的解讀也是一種數學素養的表現，透過指數函數，找出最佳支付選擇。

學習內容

F-11A-4
指數與對數函數：指數函數及其圖形，按比例成長或衰退的數學模型，常用對數函數的圖形，在科學和金融上的應用。

學習表現

f-V-4
認識指數與對數函數的圖形特徵，理解其特徵的意義，認識以指數函數為數學模型的成長或衰退現象，並能用以溝通和解決問題。

20

72 法則

▶ 金融學上有所謂的「72 法則」，所謂的 72，就是用數字 72 除以報酬率所得到的結果就是本金翻倍需要的年數。例如高富先生將一筆 100 萬存入銀行，年化報酬率為 2%，所以根據 72 法則，需要「72÷2=36」約需要 36 年可以翻倍為 200 萬，若有一個投資產品，年化報酬率為 6%，

(1)根據 72 法則，需要多少時間可以翻倍為 200 萬？

(2)若我們運用之前學過的複利計算，翻倍為 200 萬需要多少時間？（四捨五入取到小數點後第一位）

(3)承 (1)、(2)，請問這之間的誤差為何（百分比表示，四捨五入取到小數點後第二位）？

難易度	★★	範圍	2-3.3 指數與對數的應用

解

答案

(1) 12 年　(2) 大約 11.9 年　(3) 誤差為 -0.84%

解法

(1) 根據 72 法則，$72\div6=12$，需要 12 年可以翻倍為 200 萬元

(2) 設需要 x 年可以翻倍，$100\times(1+6\%)^x\geq200$，

$$1.06^x\geq2\Rightarrow x\log 1.06\geq\log 2\Rightarrow x\geq\frac{\log 2}{\log 1.06}\approx11.9$$

(3) $\dfrac{11.9-12}{11.9}\times100\%=-0.84\%$

設計說明

金融相關名詞與規則，透過數學檢驗其誤差，更能巧妙運用其規律。

學習內容

F-11A-4

指數與對數函數：指數函數及其圖形，按比例成長或衰退的數學模型，常用對數函數的圖形，在科學和金融上的應用。

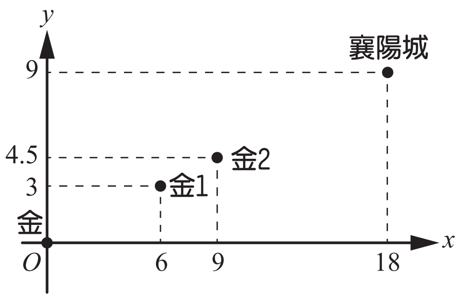
學習表現

f-V-4

認識指數與對數函數的圖形特徵，理解其特徵的意義，認識以指數函數為數學模型的成長或衰退現象，並能用以溝通和解決問題。

21 ｜襄陽城｜

▶ 鎮守襄陽城的郭靖大俠，接獲探子回報，金兵發兵五十萬，襄陽城內守軍不過五萬，宋援軍尚需一個月能到，探子繪製了金兵路徑圖，經由黃蓉加入坐標圖後，發現金兵行走路徑是直指襄陽城，圖上標示的位置分別是行軍兩週的位置，預判渡河之後速度減半，且此速度將維持不變，目前金兵已達渡河金 2 位置，估計還要多久，金兵將抵達襄陽城？宋援軍尚需一個月能到，等金兵抵達襄陽城後，郭靖和黃蓉諸人還需死守襄陽城多久援兵才會到？



難易度	★★★	範圍	3-1.1 向量的概念與坐標表示法

解

答案

三週後金兵將抵達襄陽城
城內需死守一週，援軍才能到達救援

解法

襄陽城的位置 $(18, 9)$，故金兵移動向量為 $t(2, 1)$
金兵到金兵 1 的向量為 $(6, 3)$
因為渡河之後速度減半
故金兵 1 到金兵 2 的向量為 $(3, \frac{3}{2})$
此後方向向量均為 $(3, \frac{3}{2})$
所以 $(18, 9)-(6, 3)-(3, \frac{3}{2})=(9, \frac{9}{2})=t(3, \frac{3}{2})$
得 $t=3$，故三週後金兵會抵達襄陽城
城內需要死守一週，援軍才會到達救援

設計說明

在地圖上透過坐標化與向量概念，簡化處理處理距離問題方式。

學習內容

G-11A-1
平面向量：坐標平面上的向量係數積與加減，線性組合。

學習表現

g-V-1
認識直角坐標可以用數來表示平面與空間中的位置，可以經由向量觀念而做點的運算，理解並熟練其操作，並能用於溝通。

22 | 拉縴 |

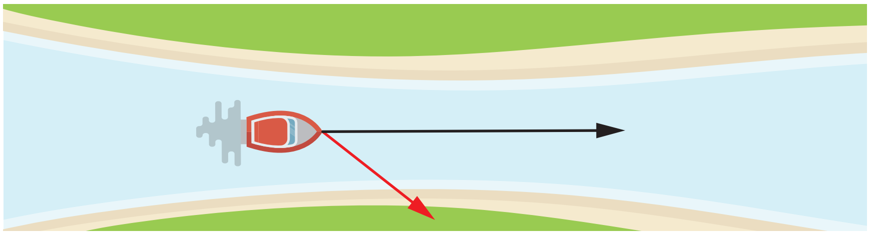
▶「拉縴」指在河的兩岸，用繩子拉船前進，在長江 三峽，常可看到居民拉縴前進的船隻。如右圖作答區所示，已知河岸右側的居民用繩子拉船方向（紅色箭頭）請問河岸左側的居民的繩子應該朝哪個方向拉船呢？請繪製方向。

難易度	★★★	範圍	3-1.2 向量的加減與係數積

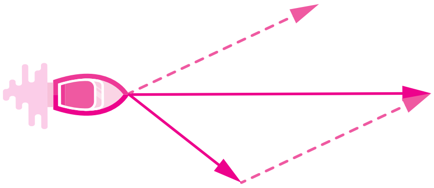
解

答案 見詳解

解法



首先將紅色箭頭與黑色箭頭連接起來
接著平行移動至船頭處，即為所求



設計說明 生活中的問題，向量線性組合透過繪圖，可以找到適當解方法。

學習內容 G-11A-1
平面向量：坐標平面上的向量係數積與加減，線性組合。

學習表現 g-V-1
認識直角坐標可以用數來表示平面與空間中的位置，可以經由向量觀念而做點的運算，理解並熟練其操作，並能用於溝通。

23 ｜捉迷藏｜

▶ 小彭與祐祐兩人在一座平地森林中玩捉迷藏，遊戲開始約定祐祐原地矇眼蹲著，小彭先行移動，並需要擲骰子前進，第一次擲出點數為 a，若為偶數則往正東方前進 $10a$ 公尺；若為奇數則往正西方前進 $10a$ 公尺。第二次擲出點數為 b，若為偶數則往正北方前進 $10b$ 公尺；若為奇數則往正南方前進 $10b$ 公尺。第三次仿造第一次前進方式，第四次仿照第二次前進方式，依此類推。已知祐祐移動的時速為 15 公尺／時，且擲出的點數為 3，5，3，6，4，2，6，1，

(1)祐祐最快花多少時間可以找到小彭？

(2)兩人走路的距離比為何？（四捨五入至整數位）

難易度 ★★★ 範圍 3-1.3 向量的線性組合

解

答案 (1) 3 小時 (2) 距離比祐祐：小彭為 3：20

解法

(1) 擲出的點數為 3，5，3，6，4，2，6，1，則為行走方向與距離為西 30 公尺，南 50 公尺，西 30 公尺，北 60 公尺，東 40 公尺，北 20 公尺，東 60 公尺，南 10 公尺

設兩人出發點為原點以北、東為正向，轉成向量

$(-30, -50)$，$(-30, 60)$，$(40, 20)$，$(60, -10)$

線性組合 $(-30, -50)+(-30, 60)+(40, 20)+(60, -10)=(40, 20)$

距離 $\sqrt{40^2+20^2}=\sqrt{2000}=20\sqrt{5}$

祐祐花的時間 $\dfrac{20\sqrt{5}}{15}\approx 2.98\approx 3$ 小時

(2) 祐祐走的距離為 $20\sqrt{5}\approx 45$ 公尺

小彭走的距離為 $30+50+30+60+40+20+60+10=300$

距離比為 45：300＝3：20

設計說明 透過坐標化後，運用向量的線性組合，可以簡化計算。

學習內容 G-11A-1

平面向量：坐標平面上的向量係數積與加減，線性組合。

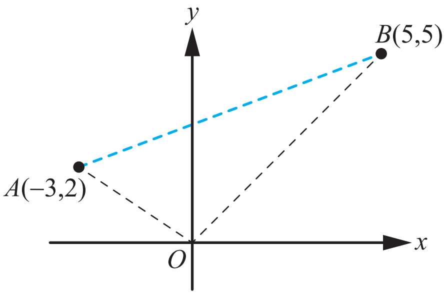
學習表現 g-V-1

認識直角坐標可以用數來表示平面與空間中的位置，可以經由向量觀念而做點的運算，理解並熟練其操作，並能用於溝通。

24

煙火

▶ 煙火設計師阿創設計一組煙火，由橋上一個定點 O 發射，設計圖如右所示，垂直橋面由 A 點到 B 點沿著直線共發射五枚，發射器使用水平跟鉛直的力道控制，阿創欲使用射到 A 點與射到 B 點兩種模式來組合成射到 C 點、D 點與 E 點的方式，利用 $xA+yB$ 的模式，其中 C、D、E 為三等分點，請針對各點求出 (x, y)。



難易度 ★ 範圍 3-1.3 向量的線性組合

解

答案 $C(0.75, 0.25)$、$D(0.5, 0.5)$、$E(0.25, 0.75)$

解法 將射程 A 轉成 $\overrightarrow{OA}$，射程 B 轉成 $\overrightarrow{OB}$

由於 ACB 三點共線，且 $\overline{AC}:\overline{CB}=1:3 \Rightarrow \overrightarrow{OC}=\frac{3}{4}\times\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\times\overrightarrow{OB}$

$(x, y)=(0.75, 0.25)$

同理 $\overline{AD}:\overline{DB}=1:1 \Rightarrow \overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\times\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\times\overrightarrow{OB}$

$(x, y)=(0.5, 0.5)$

同理 $\overline{AE}:\overline{EB}=3:1 \Rightarrow \overrightarrow{OE}=\frac{1}{4}\times\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\times\overrightarrow{OB}$

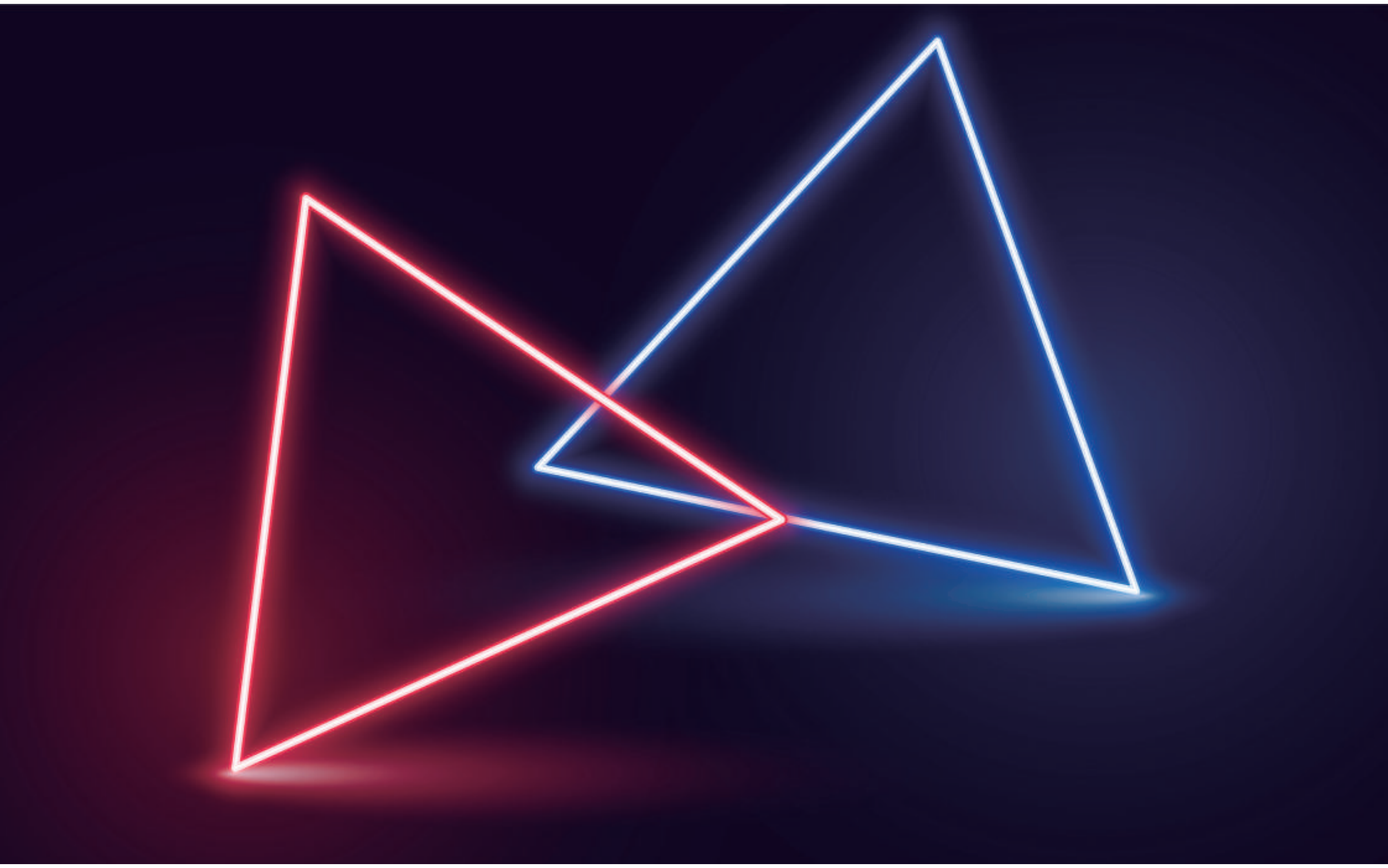
$(x, y)=(0.25, 0.75)$

設計說明 透過坐標化後，運用向量的線性組合，可以簡化計算。

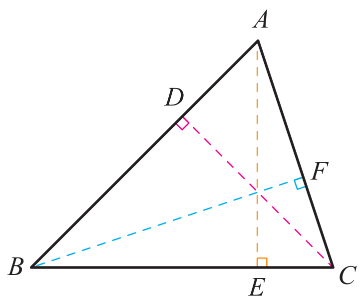
學習內容 G-11A-1
平面向量：坐標平面上的向量係數積與加減，線性組合。

學習表現 g-V-1
認識直角坐標可以用數來表示平面與空間中的位置，可以經由向量觀念而做點的運算，理解並熟練其操作，並能用於溝通。

25 ｜三角形｜



▶ 三角形 ABC 中，虛線部分為三邊的高，證明 $\overline{AB}\times\overline{BD}=\overline{BC}\times\overline{BE}$。（嘗試用兩種方式證明，列如向量內積、餘弦定理。）



難易度 ★★　　範圍 3-2.1 內積

解

答案 見詳解

解法

(1) 利用向量內積

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos B\cdots(*)$

① $(*)=|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{BE}|$，因為 $|\overrightarrow{BA}|\cos B=|\overrightarrow{BE}|$

② $(*)=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BD}|$，因為 $|\overrightarrow{BC}|\cos B=|\overrightarrow{BD}|$

所以 $\overline{AB}\times\overline{BD}=\overline{BC}\times\overline{BE}$

(2) 利用餘 $\cos\theta$ 的定義

觀察直角三角形 ABE 與 BCD

得 $\cos B=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{BC}}\Rightarrow\overline{AB}\times\overline{BD}=\overline{BC}\times\overline{BE}$

設計說明 觀察幾何圖形，透過嘗試與試驗，有時會找到一些有趣的規律。

學習內容 G-11A-6

平面向量的運算：正射影與內積，面積與行列式，兩向量的平行與垂直判定，兩向量的夾角，柯西不等式。

學習表現 g-V-5

理解並欣賞坐標系統可為幾何問題提供簡潔的算法，而坐標的平移與伸縮可以簡化代數問題，能熟練前述操作，並用以推論及解決問題。

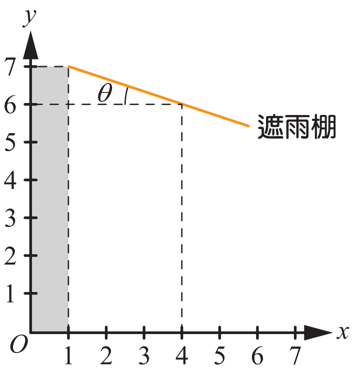
26

遮雨棚

▶ 伸縮遮雨棚（全展開為 100 公分），展開的速度為每分鐘 5 公分，想了解它的遮雨效果，故拍了側面圖，輔以坐標軸（每一單位為 20 公分）

(1) 請計算展開後 10 分鐘，地面遮雨距離（離牆角）為何？（四捨五入取至整數位）

(2) 地面遮雨距離可以什麼模型表示？



難易度 ★　**範圍** 3-2.2 正射影

解

答案

(1) 47 公分　(2) 距離 $x=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}t$（公分），$0\leq t\leq 20$

解法

(1)（法一）：

觀察剖面圖，伸縮遮雨棚通過 $(1, 7)$ 與 $(4, 6)$，

設 $\vec{a}=(3, -1)$、$|\vec{a}|=\sqrt{10}$

10 分鐘張開 50 公分（對應坐標軸為 2.5 單位）

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\times 2.5=\frac{(7.5, -2.5)}{\sqrt{10}}=\vec{b}$$

$\vec{b}$ 在 x 軸上正射影為$\dfrac{\vec{b}\cdot(1, 0)}{1^2}(1, 0)=(\dfrac{7.5}{\sqrt{10}}, 0)$

所以 10 分鐘後地面遮雨距離為$\dfrac{7.5}{\sqrt{10}}\times 20\approx 47$ 公分

（法二）：

由剖面圖可以觀察 $\tan\theta=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$\Rightarrow 50\times\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{150}{\sqrt{10}}\approx 47$ 公分

(2) 當 $t=10$ 時，正射影為 $(\dfrac{7.5}{\sqrt{10}}, 0)$，地面遮雨距離為 $\dfrac{150}{\sqrt{10}}$

當 $t=20$ 時，即全展開 100 公分，地面遮雨距離為 $\dfrac{300}{\sqrt{10}}$

所以，參數式 $\begin{cases} x=\dfrac{15}{\sqrt{10}}t \\ y=0 \end{cases}$，$0\leq t\leq 20$

故地面遮雨距離模型：距離 $x=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}t$（公分），$0\leq t\leq 20$

設計說明

透過建立參數模型，理解正射影的性質。

學習內容

G-11A-6

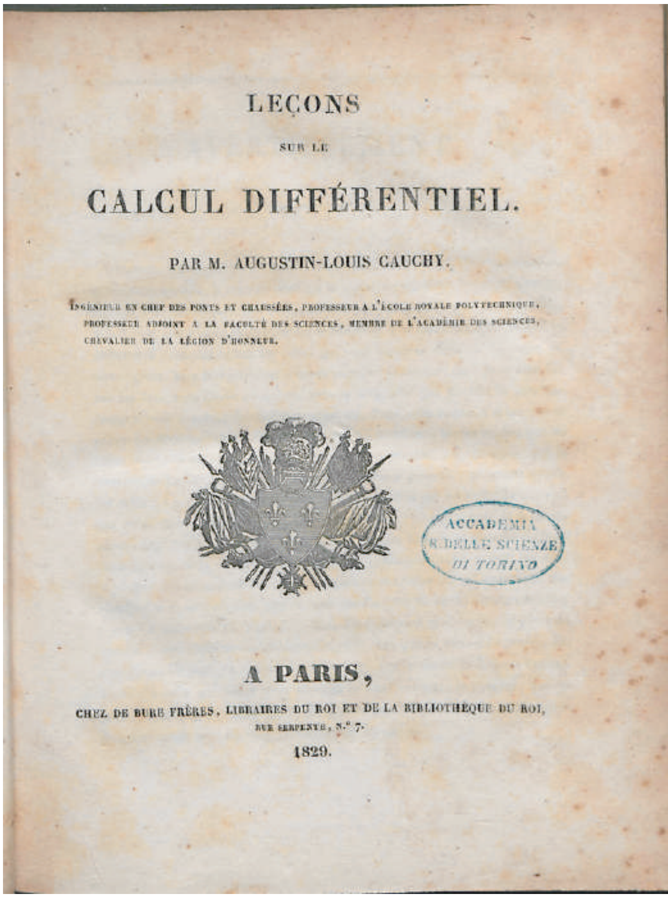
平面向量的運算：正射影與內積，面積與行列式，兩向量的平行與垂直判定，兩向量的夾角，柯西不等式。

學習表現

g-V-5

理解並欣賞坐標系統可為幾何問題提供簡潔的算法，而坐標的平移與伸縮可以簡化代數問題，能熟練前述操作，並用以推論及解決問題。

27 | 柯西不等式 |



LEÇONS

SUR LE

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES, PROFESSEUR A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE, PROFESSEUR ADJOINT A LA FACULTÉ DES SCIENCES, MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, CHEVALIER DE LA LÉGION D'HONNEUR.

ACCADEMIA R. DELLE SCIENZE DI TORINO

A PARIS,

CHEZ DE BURE FRÈRES, LIBRAIRES DU ROI ET DE LA BIBLIOTHÈQUE DU ROI, RUE SERPENTE, N.° 7.

1829.

▶ 已知圓方程式 $x^2+y^2=10$，點 $P(x, y)$ 為圓上一動點，求 $3x-4y$ 的最小值為何？

難易度 ★　**範圍** 3-2.3 柯西不等式

解

答案 $-5\sqrt{10}$

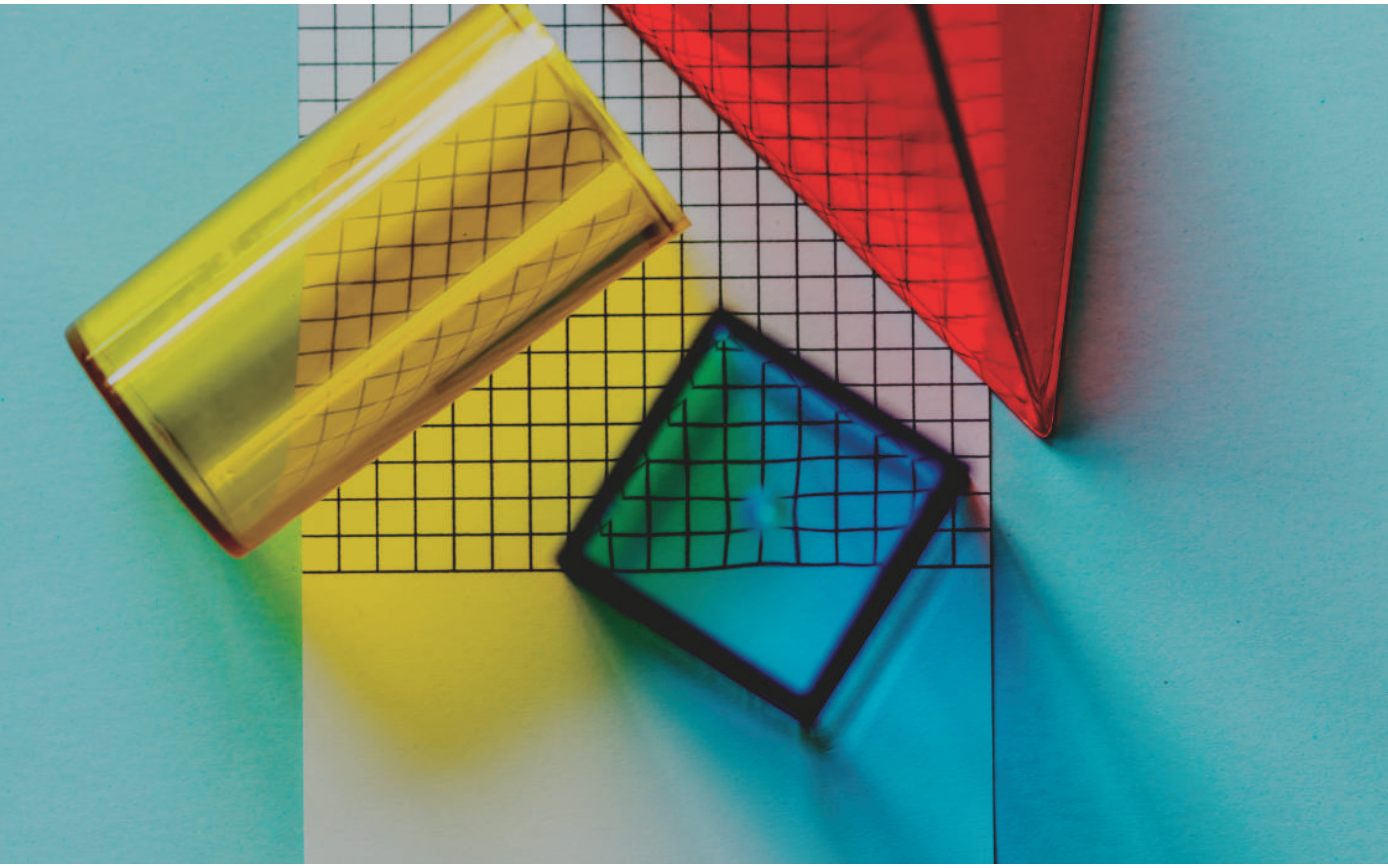
解法
觀察 x 與 y 的關係 $x^2+y^2=10$
由柯西不等式可得 $(x^2+y^2)[3^2+(-4)^2]\geq[3x+(-4y)]^2$
$\Rightarrow 10\times25\geq(3x-4y)^2\Rightarrow-5\sqrt{10}\leq3x-4y\leq5\sqrt{10}$
故 $3x-4y$ 最小值為 $-5\sqrt{10}$

設計說明
熟悉不等式的關係，可以對於欲解決的問題，提供解方法。

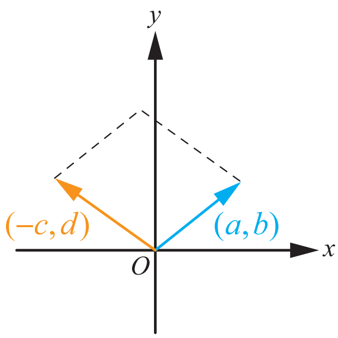
學習內容
G-11A-6
平面向量的運算：正射影與內積，面積與行列式，兩向量的平行與垂直判定，兩向量的夾角，柯西不等式。

學習表現
g-V-5
理解並欣賞坐標系統可為幾何問題提供簡潔的算法，而坐標的平移與伸縮可以簡化代數問題，能熟練前述操作，並用以推論及解決問題。

28 平行四邊形



▶ 兩向量 (a, b) 與 $(-c, d)$，其中 a、b、c、d 均為正數利用右圖，請證明張開的平行四邊形面積為 $ad+bc$。

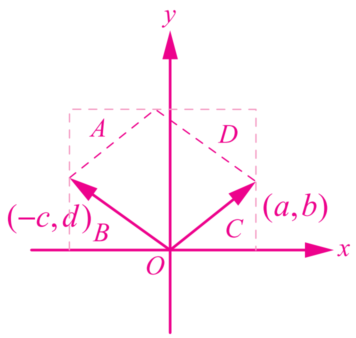


難易度 ★　**範圍** 3-3.1 二階行列式的幾何意義

解

答案 見詳解

解法 如下圖，先製作長方形，面積為 $[a-(-c)](b+d)$



三角形 A 面積 $=$ 三角形 C 面積 $=\dfrac{ab}{2}$

三角形 B 面積 $=$ 三角形 D 面積 $=\dfrac{cd}{2}$

平行四邊形面積 $=(a+c)(b+d)-ab-cd=ad+bc$

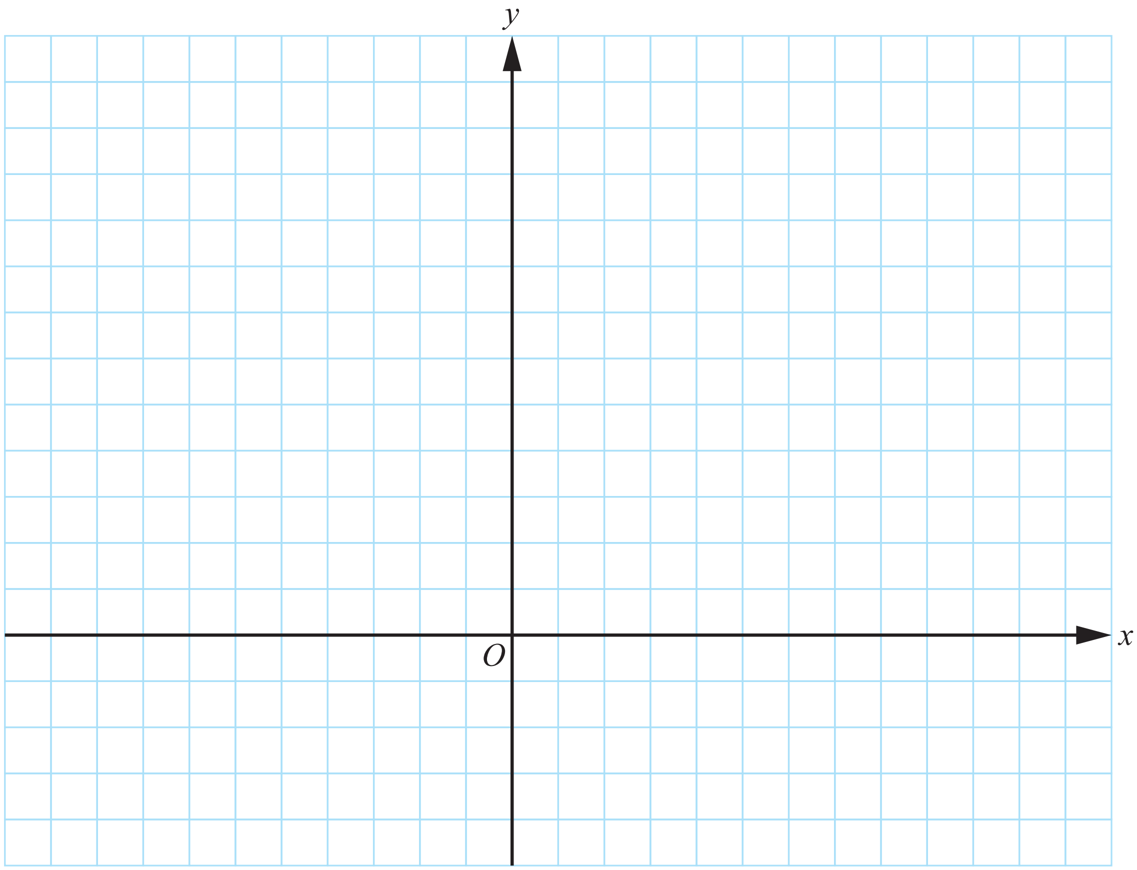
設計說明 運用幾何圖形，找出性質與關係，可以轉化成不同面向。

學習內容 G-11A-6

平面向量的運算：正射影與內積，面積與行列式，兩向量的平行與垂直判定，兩向量的夾角，柯西不等式。

學習表現 g-V-5

理解並欣賞坐標系統可為幾何問題提供簡潔的算法，而坐標的平移與伸縮可以簡化代數問題，能熟練前述操作，並用以推論及解決問題。



▶ 設 $\vec{a}=(3,2)$、$\vec{b}=(-2,5)$，若 P 點滿足 $\{P|\overrightarrow{OP}=x\vec{a}+y\vec{b},\ -1\le x\le 2,\ -\frac{1}{2}\le y\le \frac{3}{2}\}$，

(1)請在下列坐標平面上畫出 P 點所有可能的區域，並計算出 P 點區域面積。

(2)若 Q 點滿足 $\{Q|\overrightarrow{OQ}=x\vec{a}+y\vec{b},\ -1.7\le x\le 2.3,\ -\sqrt{2}\le y\le \sqrt{2}\}$，計算出 Q 點區域面積。

難易度	★★	範　圍	3-3.2 二階行列式的運算性質

解

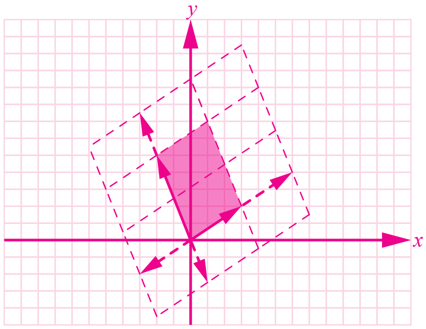
答　案

(1) 見詳解，P 點區域面積為 114

(2) Q 點區域面積為 $152\sqrt{2}$

解　法

(1) 虛線內部即為 P 點可能的區域



著色部分面積平行四邊形面積為 $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=19$

由圖形可知共有 6 個平行四邊形

P 點區域面積為 $19\times6=114$

(2) 已知 Q 點滿足 $\{Q|\overrightarrow{OQ}=x\vec{a}+y\vec{b},\ -1.7\leq x\leq2.3,\ -\sqrt{2}\leq y\leq\sqrt{2}\}$

所圍出來的區域面積與 $0\leq x\leq4$、$0\leq y\leq2\sqrt{2}$ 相同

Q 點區域面積為 $19\times8\sqrt{2}=152\sqrt{2}$

設計說明

向量線性組合透過平移的性質，簡化處理問題。

學習內容

G-11A-6

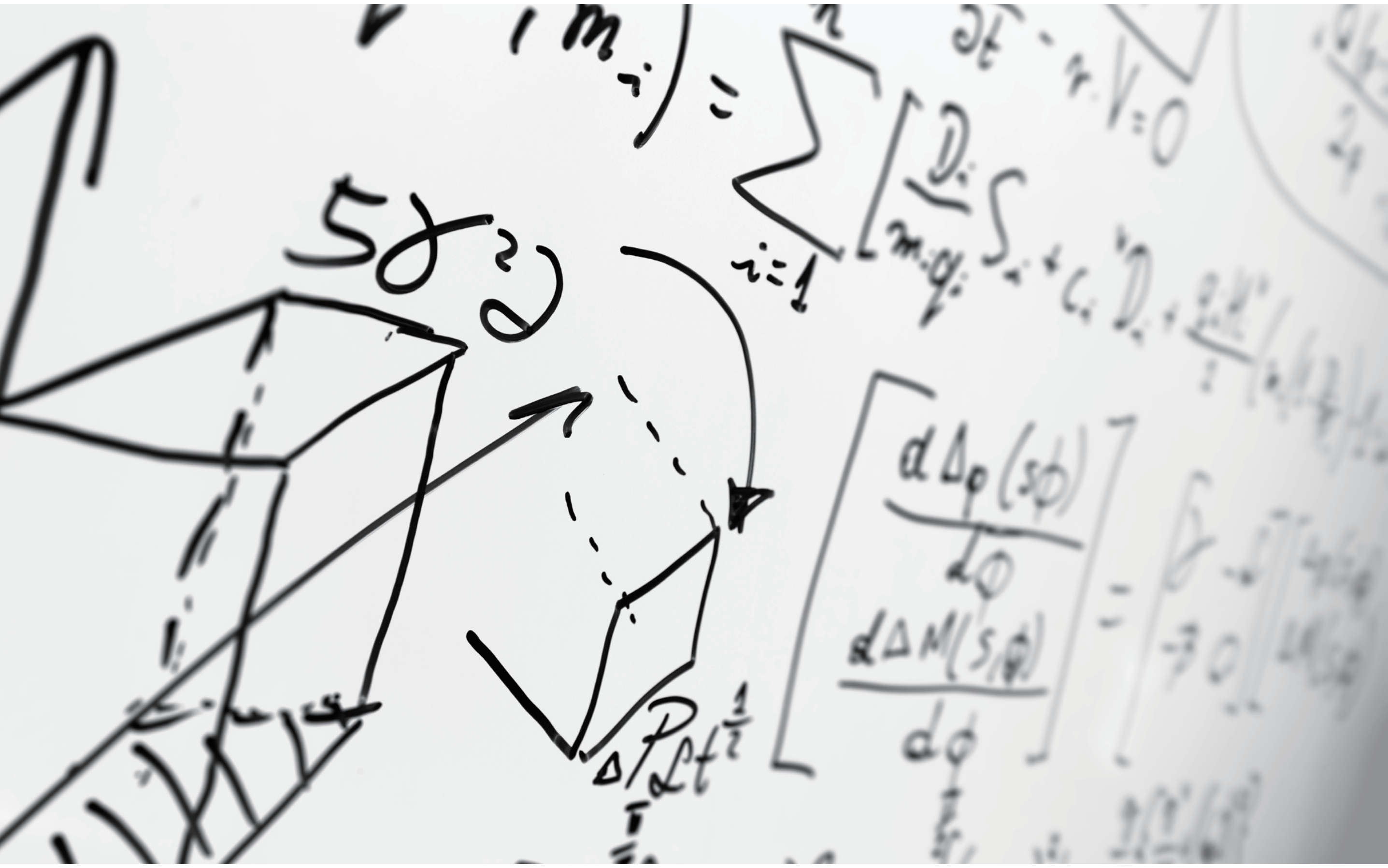
平面向量的運算：正射影與內積，面積與行列式，兩向量的平行與垂直判定，兩向量的夾角，柯西不等式。

學習表現

g-V-5

理解並欣賞坐標系統可為幾何問題提供簡潔的算法，而坐標的平移與伸縮可以簡化代數問題，能熟練前述操作，並用以推論及解決問題。

30 克拉瑪公式



▶ 兩直線 L：$17x-3y=s$、M：$13x+y=t$，交點為 (x_0, y_0)，若滿足 $x_0+y_0=3$，求 s 與 t 的關係式。

難易度 ★★ **範圍** 3-3.3 二元一次聯立方程式與克拉瑪公式

解

答案 $-3s+5t=-42$

解法 兩直線交為 (x_0, y_0)，利用克拉瑪公式

$$\Delta=\begin{vmatrix}17 & -3\\13 & 1\end{vmatrix}=17+39=56$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}s & -3\\t & 1\end{vmatrix}=s+3t$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}17 & s\\13 & t\end{vmatrix}=17t-13s$$

$$x_0=\frac{\Delta_x}{\Delta}、y_0=\frac{\Delta_y}{\Delta}$$

$$x_0+y_0=3\Rightarrow\frac{\Delta_x}{\Delta}+\frac{\Delta_y}{\Delta}=3\Rightarrow s+3t+17t-13s=3\times56$$

$-12s+20t=168$，故 $-3s+5t=-42$

設計說明 克拉瑪公式對於方程組的解，能更簡化計算步驟。

學習內容 G-11A-6

平面向量的運算：正射影與內積，面積與行列式，兩向量的平行與垂直判定，兩向量的夾角，柯西不等式。

學習表現 g-V-5

理解並欣賞坐標系統可為幾何問題提供簡潔的算法，而坐標的平移與伸縮可以簡化代數問題，能熟練前述操作，並用以推論及解決問題。

| 解　析 |

01　扇子

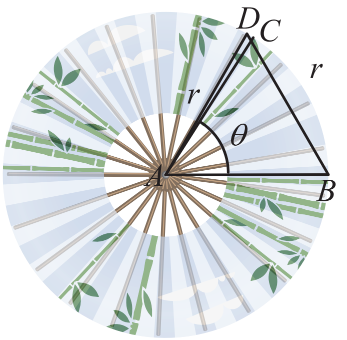
設 $\overline{AB}$ 為半徑，則 $\overline{AB}=r$

以 $\overline{AB}$ 為底作正三角形 ABD

則 $\overline{BD}=1=$ 原 $\overset{\frown}{BC}>\overline{BC}$

$\angle DAB=60°>\angle CAB=\theta$

$\theta=1$（弳）$<60°$



02　賞月

如下圖 C 為月亮的所在位置

因兩人觀測月亮的仰角皆為 89.85 度

故 $\angle ACB=0.3°$

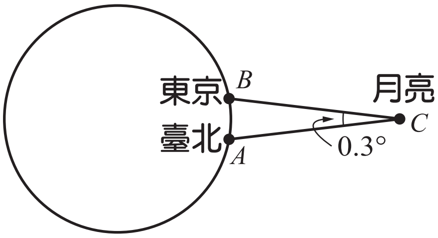
換成弧度為 $\dfrac{0.3\pi}{180}$

設 $\overline{AC}=r$

$\overline{AB}=2103=r\times\dfrac{0.3\pi}{180}$（因為角度太小，$\overset{\frown}{AB}\approx\overline{AB}$）

$r\approx401643.41$ 公里

示意圖

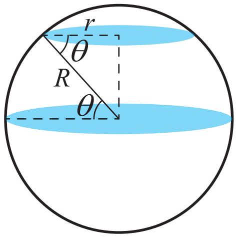


03　獵點計劃

經線間距為赤道經線間距的 $\dfrac{4}{9}$

兩弧長對應該圓的圓心角相等

表示該緯線半徑 r 為赤道半徑 R 的 $\dfrac{4}{9}$



(1) 該緯線半徑 $=6371\times\dfrac{4}{9}\approx2831.56$ 公里

(2) 獵點數目降至一半，由文本可知

　當經線間距等於赤道經線間距的 $\dfrac{4}{9}$ 時

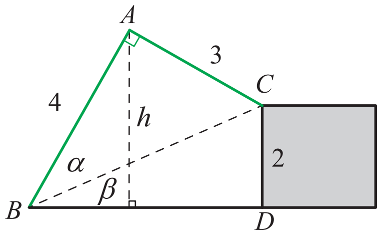
　設該緯線某點與球心連線和赤道面夾角為 θ

　$\cos\theta=\dfrac{r}{R}=\dfrac{4}{9}$，

　利用計算機 $\cos^{-1}\dfrac{4}{9}\approx63.61°$

04　露營

如下圖連接 $\overline{BC}$



所求 $h=\overline{AB}\times\sin(\alpha+\beta)$

由直角三角形 ABC 中可知

$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$、$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$

由直角三角形 BCD 中可知

$\sin\beta=\dfrac{2}{5}$、$\cos\beta=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\&=\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{21}}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}\\&=\frac{3\sqrt{21}+8}{25}\end{aligned}$$

所求 $h=4\times\dfrac{3\sqrt{21}+8}{25}\approx 3.4796$ 公尺

05　倍角公式

$$\begin{aligned}&\cos\theta\times\cos 2\theta\times\cos 4\theta\\&=\frac{2\sin\theta\times\cos\theta\times\cos 2\theta\times\cos 4\theta}{2\sin\theta}\\&=\frac{\sin 2\theta\cos 2\theta\cos 4\theta}{2\sin\theta}\\&=\frac{2\times\sin 2\theta\cos 2\theta\cos 4\theta}{2\times 2\sin\theta}\\&=\frac{\sin 4\theta\cos 4\theta}{4\sin\theta}\\&=\frac{2\times\sin 4\theta\cos 4\theta}{2\times 4\sin\theta}\\&=\frac{\sin 8\theta}{8\sin\theta}\end{aligned}$$

$\Rightarrow\dfrac{\sin 8\theta}{\sin\theta}=1\Rightarrow\sin 8\theta=\sin\theta$

$\Rightarrow 8\theta=\theta$ 或 $8\theta+\theta=\pi$

得 $\theta=0$ 或 $\dfrac{\pi}{9}$（0 不合，因為 $0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$）

故 $\theta=\dfrac{\pi}{9}$

06　示波器

已知 $\sin\alpha=\sin\beta$，設 $0<k<1$

則 $y=k$ 與 $y=\sin x$ 交兩點的 x 坐標為 α、β

已知 $\sin\gamma=\sin\delta$

則 $y=-k$ 與 $y=\sin x$ 交兩點的 x 坐標為 γ、δ

因為 $\sin x$ 圖形特徵：α、β 對稱 $\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow\beta-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$

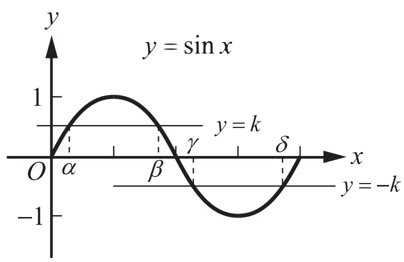
同理，γ、δ 對稱 $\dfrac{3\pi}{2}\Rightarrow\delta-\dfrac{3\pi}{2}=\dfrac{3\pi}{2}-\gamma$

且 $|\sin\alpha|=|\sin\beta|=|\sin\gamma|=|\sin\delta|$

得 $\beta-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\alpha=\delta-\dfrac{3\pi}{2}=\dfrac{3\pi}{2}-\gamma$

$\Rightarrow\dfrac{\pi}{2}-\alpha=\dfrac{3\pi}{2}-\gamma$

$\Rightarrow\gamma-\alpha=\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}=\pi$



07　海浪

$y=2[\sin(x-\dfrac{\pi}{3})]+1$ 的圖形為

$y=2(\sin x)+1$ 向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$

平移不會改變三角形面積

故可以運用 $y=2(\sin x)+1$ 來計算

當 $\sin x=\pm 1$ 時，y 有最大值 3，

最小值為 -1

設 $2\sin x+1=0$，$\sin x=-\dfrac{1}{2}$

此時 $x=\frac{7\pi}{6}$、$\frac{11\pi}{6}$ 即為 B、C 點，

$x=-\frac{\pi}{6}$為 A 點

大三角形面積 $=\frac{(\frac{7\pi}{6}-\frac{-\pi}{6})\times 3}{2}=2\pi$

小三角形面積 $=\frac{(\frac{11\pi}{6}-\frac{7\pi}{6})\times 1}{2}=\frac{\pi}{3}$

面積和 $=2\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{3}$

08　正切函數

設圖二中的直線斜率分別為 m_1、m_2、m_3、m_4、m_5

得 $m_1=\tan\theta$、$m_2=\tan 2\theta$、$m_3=\tan 3\theta$、$m_4=\tan 4\theta$、$m_5=\tan 5\theta$

由圖二可以觀察到

各直線與 $x=1$ 交點間距越來越大

θ 即為圖一的 x 坐標

斜率 m 值即為圖一的 y 坐標

圖二在 x 軸上半部可繪製出圖一的右半部

若直線往 x 軸下繪製的話，斜率為負

即可繪製出圖一的左半部

09　水上遊樂園

需要輸入的方程式為

$-(\sin x+\cos x)$

$=\sqrt{2}(\frac{-1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{-1}{\sqrt{2}}\cos x)$

$=\sqrt{2}(\sin x\cos\frac{5\pi}{4}+\cos x\sin\frac{5\pi}{4})$

$=\sqrt{2}\sin(x+\frac{5\pi}{4})$

10　波的疊合

$f(x)+g(x)=2\sin x+5\cos x$

$=\sqrt{29}(\frac{2}{\sqrt{29}}\sin x+\frac{5}{\sqrt{29}}\cos x)$

若 $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{29}}$、$\sin\alpha=\frac{5}{\sqrt{29}}$，

得 $f(x)+g(x)=\sqrt{29}(\sin(x+\alpha))$

故 $a=\sqrt{29}$

若 $\cos\beta=\frac{5}{\sqrt{29}}$、$\sin\beta=-\frac{2}{\sqrt{29}}$，

得 $f(x)+g(x)=\sqrt{29}(\cos(x+\beta))$

故 $b=\sqrt{29}$

由上述可得 $a=b$

因為 $\cos\alpha=-\sin\beta$ 且 $\sin\alpha=\cos\beta$

所以 α 與 $-\beta$ 為互餘關係，

即 $\alpha+(-\beta)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$

11　鹼性離子水

(1) 阿峰血液 pH=7.2

所以血液中氫離子濃度

$7.2=-\log[H^+]\Rightarrow[H^+]=10^{-7.2}$

設阿峰喝 x 公升的鹼性離子水，

$[H^+]$ 的濃度為 10^{-9}

得 $x\times 10^{-9}+4.5\times 10^{-7.2}=(x+4.5)\times 10^{-7.4}$

$\Rightarrow x\approx 2.6998$ 公升 $=2699.8$ 毫升

(2) $60\times 30=1800$ 毫升

(3) 雖然阿峰喝 1800 毫升的水 <2699.8 毫升

但是本文中提到此說法並沒有被科學證實

所以喝再多鹼性離子水也不能保證能中和血液的酸鹼值

12 案發現場

根據本文 $d(I)=10\times\log\dfrac{I}{I_0}$，

得 $10=10\times\log\dfrac{I}{I_0}$

即一隻蚊子發出的聲音強度為 $I=10^{-11}$ 瓦特

設現場有 x 隻蚊子，

發出的聲音強度為 $x\times10^{-11}$，

要達到 190 分貝

則 $190=10\times\log\dfrac{x\times10^{-11}}{10^{-12}}\Rightarrow19=\log 10x$

$\Rightarrow19=1+\log x\Rightarrow\log x=18\Rightarrow x=10^{18}$

故需要 10^{18} 隻蚊子

13 服用安眠藥

(1) 小敏需要入睡一覺到天亮，
所以選擇短效型安眠藥

(2) 設經過 t 個 2.5 小時後，

藥物殘留 $=(\dfrac{1}{2})^t<5\%$

得 $2^{-t}<\dfrac{1}{20}\Rightarrow-t\log 2<-\log 20$

$\Rightarrow t>\dfrac{\log 20}{\log 2}\approx4.3219$

所以需要 $4.3219\times2.5=10.80475$ 小時，
大約 10 小時 48 分
因此，需要在晚上 8 點 12 分前服用藥物

14 藥物殘留

由上方表格數據可推得

$f(0)=a\times b^0\Rightarrow a=2$

$f(0.2)=2\times b^{0.2}\approx1.3406\Rightarrow b\approx0.1353$

$f(0.4)=2\times b^{0.4}\approx0.8986\Rightarrow b\approx0.1353$

$f(0.6)=2\times b^{0.6}\approx0.6024\Rightarrow b\approx0.1353$

依序檢查 $b\approx0.1353$

當 $t=5$ 時，

$s=f(5)=2\times0.1353^5\approx0.000091$ 公克

15 咖啡

根據冷卻定律

$T(t)=$ 室溫 $+(T_0-$ 室溫 $)\times e-\alpha^{(t-t0)}$

$40=25+(50-25)\times e^{-\alpha\times10}$

$\Rightarrow15=25\times e^{-10\alpha}\Rightarrow\dfrac{3}{5}=e^{-10\alpha}$

$\Rightarrow\ln 3-\ln5=-10\alpha\Rightarrow\alpha=0.0511$

當總經理需要 30 度的咖啡時

$30=25+(50-25)\times e^{-0.0511\times t}$

$\Rightarrow\dfrac{5}{25}=e^{-0.0511t}\Rightarrow-\ln 5=-0.0511t$

$\Rightarrow t\approx31.4958\approx32$

故小蜜需要提前 32 分鐘泡咖啡

16 人口模型

(1) 根據馬爾薩斯人口模型：

$P(t)=P_0\times e^{\lambda(t-t0)}$

$333487=298166\times e^{\lambda\times5}$

$\Rightarrow\dfrac{3334487}{298166}=e^{5\lambda}$

$\Rightarrow\lambda=\dfrac{\ln\dfrac{3334487}{298166}}{5}\approx0.0224$

(2) $P(2010)=333487\times e^{0.0224\times(2010-1965)}$

≈913793 萬人

(3) 由模型預估 2010 年的人口 913793 萬人遠大於實際人口 683059 萬人，可能原因是在人口相對少時，基本上模型是沒有問題的，但實際上當人口相當多時，人口成長率便會逐漸趨緩，且越靠近人口上限時，成長率越小。另外，法國 國家人口研究所最新報告顯示，預估西元 2050 年全世界人口將高達 97 億人。

17 傳染病

根據題意 R0 值為 3.4，可知若 1 人染病的話，則會傳染給 3.4 人

設公比 r 為 3.4、第 n 個 2.34 天傳染人數會超過 2000 人

$1+3.4+3.4^2+3.4^3+\cdots+3.4n>2000$

$\dfrac{1(3.4^{n+1}-1)}{3.4-1}>2000$

$3.4^{n+1}-1>2000\times2.4$

$3.4^{n+1}>4801$

$n+1>\log_{3.4}4801=\dfrac{\log 4801}{\log 3.4}\approx6.9266$

$n>5.9266$

所以 $5.9266\times2.34=13.8682\approx14$ 天

18　費馬數

$F_6=2^{2^6}+1=2^{64}+1$

$\Rightarrow\log(2^{64}+1)\approx\log 2^{64}=64\times\log 2\approx19.2659$

可得首數 $=19\Rightarrow20$ 位數

尾數 $=0.2659\Rightarrow\log a=0.2659$

$\Rightarrow a=10^{0.2659}\approx1.8446$

所以前三位數字為 184

19　電動摩托車

(1) 因為阿宇住在新北市，
參考新北市的價格
扣除補助後購車總金額為 43980 元
24 期 0 利率的話，
平均每期需要支付 1832.5 元
若扣除首次付款 1832.5 元，
其餘存入銀行，依年利率 1.09%
每個月領出 1832.5 元繳款

(2) 2 年後的本利和為

$1832.5\times(1+\dfrac{1.09\%}{12})^{23}+1832.5$

$\times(1+\dfrac{1.09\%}{12})^{22}+\cdots+1832.5$

$=\dfrac{1832.5\times(1-1.000908^{24})}{1-1.000908}$

$=44442.3117$

$44442.3117-1832.5\times24=462.3117$

選擇 24 期 0 利率優於一次付清

20　72 法則

(1) 根據 72 法則，$72\div6=12$，
需要 12 年可以翻倍為 200 萬元

(2) 設需要 x 年可以翻倍，

$100\times(1+6\%)^x\geq200$，

$1.06^x\geq2\Rightarrow x\log1.06\geq\log2$

$\Rightarrow x\geq\dfrac{\log 2}{\log 1.06}\approx11.9$

(3) $\dfrac{11.9-12}{11.9}\times100\%=-0.84\%$

21　襄陽城

襄陽城的位置 (18, 9)，
故金兵移動向量為 $t(2,1)$
金兵到金兵 1 的向量為 (6, 3)
因為渡河之後速度減半

故金兵 1 到金兵 2 的向量為 $(3,\dfrac{3}{2})$

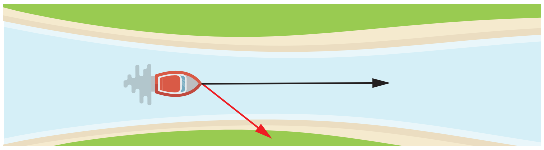
此後方向向量均為 $(3,\dfrac{3}{2})$

所以 $(18,9)-(6,3)-(3,\dfrac{3}{2})$

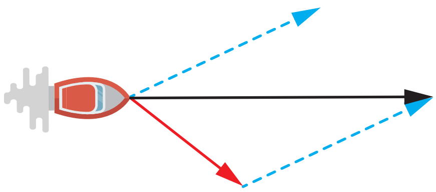
$=(9,\dfrac{9}{2})=t(3,\dfrac{3}{2})$

得 $t=3$，故三週後金兵會抵達襄陽城
城內需要死守一週，援軍才會到達救援

22　拉縴



首先將紅色箭頭與黑色箭頭連接起來
接著平行移動至船頭處，即為所求



23　捉迷藏

(1) 擲出的點數為 3，5，3，6，4，2，6，1，則為行走方向與距離為西 30 公尺，南 50 公尺，西 30 公尺，北 60 公尺，東 40 公尺，北 20 公尺，東 60 公尺，南 10 公尺
設兩人出發點為原點以北、
東為正向，轉成向量
$(-30, -50)$，$(-30, 60)$，$(40, 20)$，$(60, -10)$
線性組合 $(-30, -50)+(-30, 60)+(40, 20)+(60, -10)=(40, 20)$
距離 $\sqrt{40^2+20^2}=\sqrt{2000}=20\sqrt{5}$
祐祐花的時間 $\dfrac{20\sqrt{5}}{15}\approx 2.98\approx 3$ 小時

(2) 祐祐走的距離為 $20\sqrt{5}\approx 45$ 公尺
小彭走的距離為
$30+50+30+60+40+20+60+10=300$
距離比為 $45：300=3：20$

24　煙火

將射程 A 轉成 $\overrightarrow{OA}$，射程 B 轉成 $\overrightarrow{OB}$
由於 ACB 三點共線，
且 $\overline{AC}：\overline{CB}=1：3\Rightarrow\overrightarrow{OC}=\dfrac{3}{4}\times\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{4}\times\overrightarrow{OB}$
$(x, y)=(0.75, 0.25)$
同理 $\overline{AD}：\overline{DB}=1：1$
$\Rightarrow\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{2}\times\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\times\overrightarrow{OB}$
$(x, y)=(0.5, 0.5)$
同理 $\overline{AE}：\overline{EB}=3：1$
$\Rightarrow\overrightarrow{OE}=\dfrac{1}{4}\times\overrightarrow{OA}+\dfrac{3}{4}\times\overrightarrow{OB}$
$(x, y)=(0.25, 0.75)$

25　三角形

(1) 利用向量內積
$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos B\ldots(*)$
① $(*)=|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{BE}|$，
因為 $|\overrightarrow{BA}|\cos B=|\overrightarrow{BE}|$
② $(*)=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BD}|$，
因為 $|\overrightarrow{BC}|\cos B=|\overrightarrow{BD}|$
所以 $\overline{AB}\times\overline{BD}=\overline{BC}\times\overline{BE}$

(2) 利用餘 $\cos\theta$ 的定義
觀察直角三角形 ABE 與 BCD
得 $\cos B=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$
$\Rightarrow\overline{AB}\times\overline{BD}=\overline{BC}\times\overline{BE}$

26　遮雨棚

(1)（法一）：
觀察剖面圖，伸縮遮雨棚通過 $(1, 7)$ 與 $(4, 6)$，
設 $\vec{a}=(3, -1)$、$|\vec{a}|=\sqrt{10}$
10 分鐘張開 50 公分（對應坐標軸為 2.5 單位）
$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\times 2.5=\dfrac{(7.5, -2.5)}{\sqrt{10}}=\vec{b}$
$\vec{b}$ 在 x 軸上正射影為
$\dfrac{\vec{b}\cdot(1, 0)}{1^2}(1, 0)=(\dfrac{7.5}{\sqrt{10}}, 0)$
所以 10 分鐘後地面遮雨距離為
$\dfrac{7.5}{\sqrt{10}}\times 20\approx 47$ 公分
（法二）：
由剖面圖可以觀察 $\tan\theta=\dfrac{1}{3}$
$\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$
$\Rightarrow 50\times\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{150}{\sqrt{10}}\approx 47$ 公分

(2) 當 $t=10$ 時，正射影為 $(\dfrac{7.5}{\sqrt{10}}, 0)$，
地面遮雨距離為 $\dfrac{150}{\sqrt{10}}$
當 $t=20$ 時，即全展開 100 公分，

地面遮雨距離為 $\dfrac{300}{\sqrt{10}}$

所以，參數式 $\begin{cases} x=\dfrac{15}{\sqrt{10}}t \\ y=0 \end{cases}$，$0\leq t\leq 20$

故地面遮雨距離模型：

距離 $x=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}t$（公分），$0\leq t\leq 20$

27　柯西不等式

觀察 x 與 y 的關係 $x^2+y^2=10$

由柯西不等式可得

$(x^2+y^2)[3^2+(-4)^2]\geq[3x+(-4y)]^2$

$\Rightarrow 10\times 25\geq(3x-4y)^2$

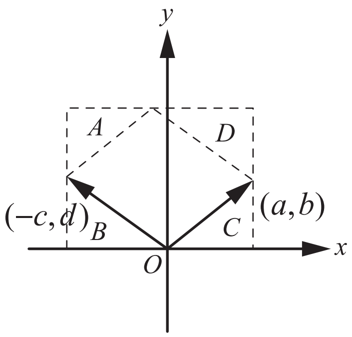
$\Rightarrow -5\sqrt{10}\leq 3x-4y\leq 5\sqrt{10}$

故 $3x-4y$ 最小值為 $-5\sqrt{10}$

28　平行四邊形

如下圖，先製作長方形，

面積為 $[a-(-c)](b+d)$



三角形 A 面積 ＝ 三角形 C 面積 ＝ $\dfrac{ab}{2}$

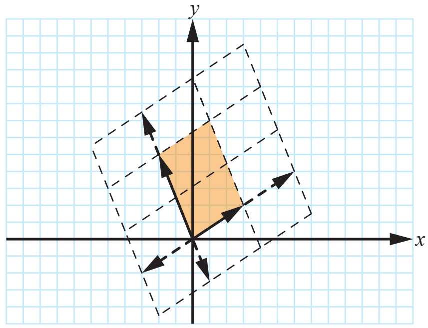
三角形 B 面積 ＝ 三角形 D 面積 ＝ $\dfrac{cd}{2}$

平行四邊形面積

$=(a+c)(b+d)-ab-cd=ad+bc$

29　動手繪圖

(1) 虛線內部即為 P 點可能的區域



著色部分面積平行四邊形面積為

$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=19$

由圖形可知共有 6 個平行四邊形

P 點區域面積為 $19\times 6=114$

(2) 已知 Q 點滿足

$\{Q|\overrightarrow{OQ}=x\vec{a}+y\vec{b},\ -1.7\leq x\leq 2.3,$

$-\sqrt{2}\leq y\leq\sqrt{2}\}$

所圍出來的區域面積與 $0\leq x\leq 4$、

$0\leq y\leq 2\sqrt{2}$ 相同

Q 點區域面積為 $19\times 8\sqrt{2}=152\sqrt{2}$

30　克拉馬公式

兩直線交為 (x_0, y_0)，利用克拉瑪公式

$\Delta=\begin{vmatrix} 17 & -3 \\ 13 & 1 \end{vmatrix}=17+39=56$

$\Delta x=\begin{vmatrix} s & -3 \\ t & 1 \end{vmatrix}=s+3t$

$\Delta y=\begin{vmatrix} 17 & s \\ 13 & t \end{vmatrix}=17t-13s$

$x_0=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$、$y_0=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$

$x_0+y_0=3\Rightarrow\dfrac{\Delta_x}{\Delta}+\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=3$

$\Rightarrow s+3t+17t-13s=3\times 56$

$-12s+20t=168$，故 $-3s+5t=-42$

NOTE

如果對本書有任何的批評和意見
請撥打讀者服務專線 0800-060-559 或 E-mail：service@taiyucoo.com.tw

普通型高級中等學校數學領域

高中數學（三）A 素養題本

編 著 者 ▌邱健銘

責任編輯 ▌曾聖元

出 版 者 ▌泰宇出版事業股份有限公司
地址：241 新北市三重區重新路四段 53 號 12 樓
電話：(02)2984-4865 傳真：(02)2986-4034
網址：www.taiyucoo.com.tw

劃撥帳號 ▌19157592 泰宇出版股份有限公司

登 記 證 ▌局版臺省業字第608號

書籍編號 ▌69203 A(9/1) Q

定　　價 ▌100元

69203A

69203Q